

1

Formules en grafieken

Wat leer je?

- Opstellen van lineaire formules.
- Lineair interpoleren en extrapoleren.
- Wat recht evenredig en omgekeerd evenredig is en hoe je hierbij formules opstelt.
- De grafische rekenmachine gebruiken bij grafieken.
- Werken met wiskundige modellen.



Beginopdracht Wegwerkzaamheden

Bij wegwerkzaamheden op een tweebaansweg waarbij de ene weghelft niet bereden kan worden, gebruikt men vaak verkeerslichten om het verkeer in goede banen te leiden. Eerst wachten de auto's aan de ene kant van het weggedeelte voor het verkeerslicht. Nadat alle auto's van de andere kant zijn gepasseerd, gaat het verkeerslicht op groen. Je kunt je afvragen hoelang het verkeerslicht op rood moet staan en waar dat van afhangt.

Op een tweebaansweg tussen de plaatsen A en B is één rijbaan over een lengte van één kilometer gestremd omdat er wegwerkzaamheden plaatsvinden. Men regelt het verkeer door aan beide kanten een verkeerslicht te plaatsen. Als het verkeerslicht vanuit A op rood staat, kan het verkeer dat vanuit B komt van de beschikbare weghelft gebruikmaken om te passeren. Op een gegeven moment gaat het verkeerslicht vanuit B op rood. Als alle auto's uit die richting de kilometer met de wegwerkzaamheden zijn gepasseerd, kan het verkeerslicht vanuit A op groen springen om de auto's vanuit A te laten passeren.

We vragen ons af hoelang een verkeerslicht op rood moet staan om een vlotte doorstroming te garanderen.

- Waarvan is deze tijdsduur afhankelijk, denk je?

In beide richtingen rijden per uur 240 auto's. Men wil de verkeerslichten zo afstellen, dat telkens als het verkeerslicht op groen staat alle auto's die hebben staan wachten kunnen doorrijden. Vanwege de veiligheid voor de wegwerkers mag er langs het afgezette gedeelte van de weg niet harder worden gereden dan 50 kilometer per uur.

Om grip op deze situatie te krijgen bekijk je een aantal scenario's.

Daarbij kijk je of er geen problemen ontstaan en of de auto's niet onnodig lang hoeven te wachten.

Als je gegevens tekortkomt, doe dan zelf enkele aannames.

- Reken de volgende scenario's door:
 - 1 de verkeerslichten staan telkens 2 minuten op rood
 - 2 de verkeerslichten staan telkens 3 minuten op rood
 - 3 de verkeerslichten staan telkens 4 minuten op rood
 - 4 de verkeerslichten staan telkens 5 minuten op rood.
- Welk van bovenstaande scenario's zou jij kiezen? Licht toe.

Op een andere tweebaansweg, waarvan één rijbaan wegens wegwerkzaamheden over een lengte van 500 meter is gestremd, rijden in beide richtingen 300 auto's per uur. De toegestane snelheid op het gedeelte van 500 meter is 30 km/uur.

- Onderzoek wat in deze situatie een acceptabel scenario is om de verkeersstromen te regelen.



Voorkennis Lineaire vergelijkingen

Theorie A Lineaire vergelijkingen oplossen

Een voorbeeld van een lineaire vergelijking is $5x + 2 = 37 - 2x$.

Hierin heet $5x + 2$ het linkerlid en $37 - 2x$ het rechterlid.

Je lost de vergelijking op door hem stap voor stap eenvoudiger te maken.

Je mag daarbij

- termen van het ene lid naar het andere lid brengen, maar dan moet je
– vervangen door + en + vervangen door –
- beide leden door hetzelfde getal delen of met hetzelfde getal vermenigvuldigen.

Het oplossen van de vergelijking $5x + 2 = 37 - 2x$ gaat als volgt.

$$5x + 2 = 37 - 2x \quad \text{Termen met } x \text{ naar links en de rest naar rechts.}$$

$$5x + 2x = 37 - 2 \quad \text{Herleid beide leden.}$$

$$7x = 35 \quad \text{Deel beide leden door het getal dat voor } x \text{ staat.}$$

$$x = 5$$

Dus $x = 5$ is de oplossing van de vergelijking $5x + 2 = 37 - 2x$.

Door $x = 5$ in de vergelijking in te vullen, kun je controleren dat het

klopt: $5 \cdot 5 + 2 = 37 - 2 \cdot 5$. Inderdaad, het klopt, want je krijgt $27 = 27$.

Let op het verschil tussen $x + 4 = 20$, $4x = 20$ en $\frac{1}{4}x = 20$.

$x + 4 = 20$ $x = 20 - 4$ $x = 16$	$4x = 20$ $x = \frac{20}{4}$ $x = 5$	$\frac{1}{4}x = 20$ $x = 4 \cdot 20$ $x = 80$
--	--	---

Staan er in een lineaire vergelijking haakjes, werk die dan eerst weg.

Zo krijg je bij $3(x - 3) = x + 8$ eerst $3x - 9 = x + 8$. Enzovoort.

Bij de vergelijking $\frac{1}{2}x - 2 = \frac{2}{5}x$ is het verstandig eerst alle termen met 10 te vermenigvuldigen. Daardoor verdwijnen de breuken.

Je krijgt

$$10 \cdot \frac{1}{2}x - 10 \cdot 2 = 10 \cdot \frac{2}{5}x$$

$$5x - 20 = 4x$$

$$5x - 4x = 20$$

$$x = 20$$

$$10 \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$10 \cdot \frac{2}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\text{Algemeen: } A \cdot \frac{B}{C} = \frac{AB}{C}$$

Werkschema: lineaire vergelijkingen oplossen

- 1 Werk zo nodig de haakjes en de breuken weg.
- 2 Breng de termen met de variabele naar het linkerlid en de rest naar het rechterlid, en herleid beide leden.
- 3 Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat.

Voorbeeld

Los op.

a $3(x-3) = x+8$ **b** $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{1}{6}(x+12)$

Uitwerking

a $3(x-3) = x+8$

$3x-9 = x+8$

$2x = 17$

$x = 8\frac{1}{2}$

b $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{1}{6}(x+12)$

$\frac{2}{3}x - 4 = \frac{1}{6}x + 2$

$4x - 24 = x + 12 \quad \times 6$

$3x = 36$

$x = 12$

Werk eerst de haakjes weg en vervolgens de breuken.

$6 \cdot \frac{2}{3}x - 6 \cdot 4 = 6 \cdot \frac{1}{6}x + 6 \cdot 2$

1 Los op.

a $x+5 = 20$

b $5x = 20$

c $\frac{1}{5}x = 20$

d $6x-2 = 2x+18$

e $3-2x = 5x+3$

f $5-x = 2x-1$

2 Los op.

a $2(x-1) = 3(x+2)$

b $3(x-80) = 100-x$

c $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{4}x$

d $5-3(x+1) = 15-2x$

e $2(x-3)-7 = 3(x-6)+18$

f $5x+5 = \frac{5}{6}(x-1)$

3 Los op.

a $8-3(2x-1) = 3+2(1-x)$

b $2x-1 = \frac{1}{2}x+3$

c $\frac{1}{3}(2x-3) = \frac{1}{4}x+4$

d $2\frac{1}{3}x+6 = \frac{1}{3}x-8$

e $1,8x+0,6 = -1,2x+3$

f $\frac{1}{8}x-7 = 3$

1.1 Lineaire formules

01
☐ ⊗ *

Gegeven zijn vier lineaire formules en de bijbehorende grafieken.

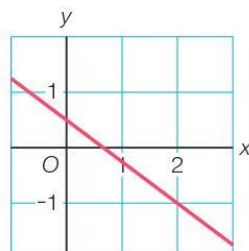
Zoek bij elke formule de juiste grafiek.

I $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

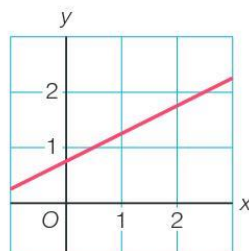
II $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

III $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

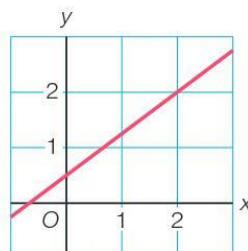
IV $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$



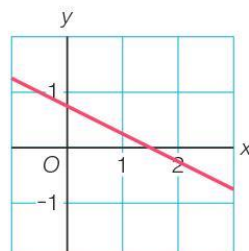
A



B



C



D

figuur 1.1

Theorie A Richtingscoëfficiënt

De grafiek van de **lineaire formule** $y = \frac{1}{2}x + 2$ is de lijn waarvoor geldt

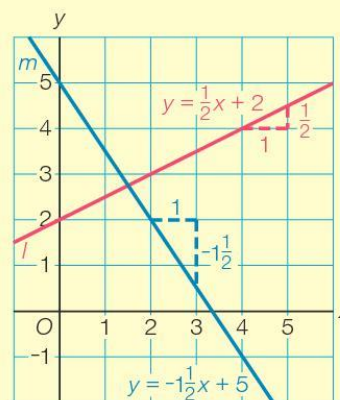
- het snijpunt met de y-as is $(0, 2)$
- ga je 1 naar rechts, dan ga je $\frac{1}{2}$ omhoog.

Het getal $\frac{1}{2}$ in de formule $y = \frac{1}{2}x + 2$ heet de **richtingscoëfficiënt** van de lijn. We noteren de richtingscoëfficiënt van lijn l is $\frac{1}{2}$ als $rc_l = \frac{1}{2}$.

Van de lijn m : $y = -1\frac{1}{2}x + 5$ is de richtingscoëfficiënt gelijk aan $-1\frac{1}{2}$. Dus $rc_m = -1\frac{1}{2}$. Dit betekent:

ga je 1 naar rechts, dan ga je $-1\frac{1}{2}$ omhoog.

Dat is hetzelfde als 1 naar rechts en $1\frac{1}{2}$ omlaag
en ook hetzelfde als 2 naar rechts en 3 omlaag.



figuur 1.2

Van de lijn $y = ax + b$ is de richtingscoëfficiënt a .

$rc = a$ betekent: 1 naar rechts en a omhoog.

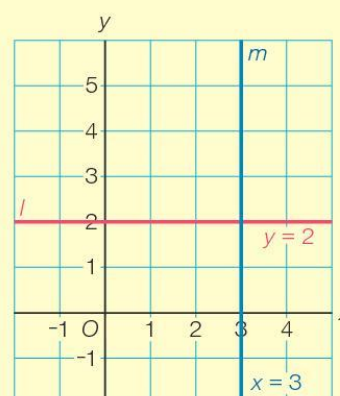
De lijn $y = ax + b$ snijdt de y-as in het punt $(0, b)$.

De lijnen p : $y = 3x - 5$ en q : $y = 3x + 7$ hebben dezelfde richtingscoëfficiënt. Daarom zijn de lijnen p en q evenwijdig.

Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.

Van de lijn l in figuur 1.3 is $rc_l = 0$. Immers, ga je 1 naar rechts, dan ga je 0 omhoog. Dus de formule van l is $y = 0x + 2$. Hiervoor schrijven we kortweg $y = 2$. Op de lijn $y = 2$ liggen alle punten met y -coördinaat 2.

Op de verticale lijn m in figuur 1.3 liggen alle punten met de x -coördinaat 3. Daarom zeggen we dat de lijn m de formule $x = 3$ heeft. Een verticale lijn heeft geen richtingscoëfficiënt.



figuur 1.3

**De lijn $y = 5$ is de horizontale lijn door het punt $(0, 5)$.
Alle punten op deze lijn hebben y -coördinaat 5.
De lijn $x = 6$ is de verticale lijn door het punt $(6, 0)$.
Alle punten op deze lijn hebben x -coördinaat 6.**

Voorbeeld

Teken in één figuur de lijnen $l: y = -0,8x + 3$, $m: y = 3$ en $n: x = 4$.

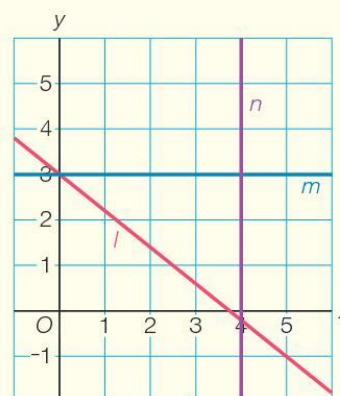
Aanpak

Maak bij l een tabel met twee ‘mooie’ punten. Verder is m de horizontale lijn door $(0, 3)$ en n de verticale lijn door $(4, 0)$.

Uitwerking

x	0	5
$y = -0,8x + 3$	3	-1

Zie figuur 1.4.



figuur 1.4

2

Gegeven zijn de lijnen $k: y = -3x + 2$, $m: y = \frac{1}{2}x - 1$, $p: y = 2$ en $q: y = 2x$.

- Teken deze lijnen in één figuur.
- Schrijf van elke lijn de richtingscoëfficiënt op. Noteer $rc_k = \dots$, enzovoort.



3 Gegeven zijn de lijnen $p: y = 6 - 2,5x$ en $q: y = 1,2x - 3$.

- a** Teken p en q in één figuur.
- b** De lijn p snijdt de y -as in het punt A . De lijn k gaat door A en is evenwijdig met de lijn q .
Teken k en stel de formule van k op.
- c** De lijn l gaat door de oorsprong $O(0, 0)$ en is evenwijdig met de lijn p .
Stel de formule van l op.
- d** De lijn q snijdt de y -as in het punt B .
Stel de formule op van de horizontale lijn m die door het punt B gaat.



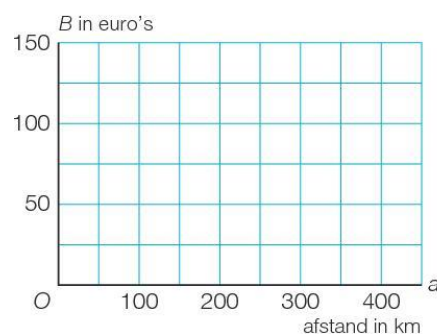
A4 Gegeven zijn de lijnen $k: y = 0,6x - 3$, $l: y = -1,5x + 4$ en m met $rc_m = 2,5$ die door het punt $(0, -6)$ gaat.

- a** Teken k , l en m in één figuur.
- b** Teken de lijn n die door de oorsprong gaat en evenwijdig is met k .
Wat is de formule van n ?
- c** De lijn k snijdt de x -as in het punt A . De lijn p gaat door A en is evenwijdig met de y -as.
Stel van p de formule op.
- d** De lijn l snijdt de y -as in het punt B .
De lijn q gaat door B en is evenwijdig met de x -as.
Stel van q de formule op.



5 Bij autoverhuurbedrijf Rent-a-car kun je voor één dag een bestelauto huren. Met de formule $B = 0,15a + 80$ kun je berekenen hoeveel euro je moet betalen als je a km rijdt.

- a** Hoeveel euro moet je betalen bij een afstand van 50 km?
- b** Bij de grafiek hoort een assenstelsel zoals in figuur 1.5.
Hoe zie je aan de formule dat de a -as de horizontale as is?
- c** Teken de grafiek. Waarom mag je niet links van de B -as tekenen?
- d** In de formule staan twee getallen. Welke informatie geeft 0,15 over het verhuurtarief? En welke informatie geeft 80?



figuur 1.5

Autoverhuurbedrijf Cheap rekent een vast bedrag van 90 euro en een bedrag van 11 cent per km.

- e** Stel de formule op van het bedrag B in euro's dat je bij Cheap betaalt als je a km rijdt en teken de grafiek van B in de figuur van vraag c.
- f** Welk bedrijf is het voordeligst bij een rit van 150 km? Hoeveel scheelt het?
- g** Vanaf welk aantal km is Cheap voordeliger dan Rent-a-car?

6

- a** In een cilindervormig vat staat het water 80 cm hoog. Na opening van een kraan stroomt het vat met constante snelheid leeg. Per minuut daalt het water met 5 cm.
Stel de formule op van de waterhoogte h in cm t minuten na het openen van de kraan.
- b** Aan het wateroppervlak heerst een druk van 1015 hPa. Onder water neemt per 10 meter de druk met 1000 hPa toe.
Stel de formule op van de druk P in hPa op een waterdiepte van d meter.
- c** Op 1 januari 2018 was er 550 miljoen ha tropisch regenwoud in het Amazonegebied. Door met name houtkap neemt de oppervlakte hiervan dagelijks met 2200 ha af.
Stel de formule op van de oppervlakte A aan tropisch regenwoud in het Amazonegebied t jaar na 1 januari 2018. Neem A in miljoenen ha en rond in het antwoord af op één decimaal.

**E7**

- Jannie moet 40 opgaven als huiswerk maken. Om haar te stimuleren belooft haar moeder 50 cent voor elke opgave die ze goed doet. Maar voor elke fout gemaakte opgave gaat er 1 euro af. Ze maakt alle opgaven.
- a** Bereken hoeveel euro Jannie krijgt als ze 32 opgaven goed maakt.
- b** Stel de formule op van het bedrag B in euro's dat Jannie krijgt als ze x opgaven goed maakt.
- c** Jannie krijgt uiteindelijk 2 euro van haar moeder.
Hoeveel opgaven had Jannie goed?

O8

- Gegeven is de lijn $m: y = 1\frac{1}{2}x + 9$.
- a** Hoe kun je narekenen dat het punt $A(12, 27)$ op m ligt?
- b** Welke van de punten $B(-20, -21)$, $C(-8, 3)$ en $D(82, 132)$ liggen op m ?

Verder is gegeven de lijn $n: y = -\frac{1}{2}x + 4$. Het snijpunt van de lijnen m en n is het punt S . Om de coördinaten van S te berekenen los je de vergelijking $1\frac{1}{2}x + 9 = -\frac{1}{2}x + 4$ op.

- c** Licht dit toe en bereken de coördinaten van S .

Theorie B Snijpunten van lijnen

Weet je dat het punt $P(3, 5)$ op de lijn $l: y = 2x + b$ ligt, dan kun je b berekenen. Je vult daartoe $x = 3$ en $y = 5$ in de formule van de lijn in. Je krijgt $5 = 2 \cdot 3 + b$. Dit geeft $b = -1$.
Zo krijg je de formule $l: y = 2x - 1$.

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen $k: y = -\frac{2}{3}x + 6$ en $l: y = \frac{1}{2}x - 1$. Verder is gegeven de lijn m door het punt $A(18, 6)$ die evenwijdig is met l .

- a Stel de formule van m op en bereken de coördinaten van het snijpunt B van m met de x -as.
- b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l .

Uitwerking

a $m: y = ax + b$ met $a = rc_l = \frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(18, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 18 + b = 6 \\ 9 + b = 6 \\ b = -3 \end{array}$$

Dus $m: y = \frac{1}{2}x - 3$.

$y = 0$ geeft $\frac{1}{2}x - 3 = 0$

$$\frac{1}{2}x = 3$$
$$x = 6$$

Snijpunt met x -as, dus $y = 0$.

Dus $B(6, 0)$.

- b k snijden met l geeft

$$\begin{array}{rcl} -\frac{2}{3}x + 6 & = & \frac{1}{2}x - 1 \\ -4x + 36 & = & 3x - 6 \end{array} \quad \times 6$$

$$-7x = -42$$

$$x = 6$$

$x_S = 6$ geeft $y_S = -\frac{2}{3} \cdot 6 + 6 = 2$, dus $S(6, 2)$.

R9

Zie voorbeeld b.



Om de y -coördinaat van S te berekenen, is $x = 6$ ingevuld in de formule van k .

Had je hiervoor ook de formule van l mogen gebruiken? Licht toe.

10



- a De lijn l gaat door het punt $A(-2, 3)$ en $rc_l = -1\frac{1}{2}$.

Stel de formule van l op.

- b De lijn k gaat door het punt $B(-5, 21)$ en is evenwijdig met de lijn $m: y = 4x - 6$.

Stel de formule van k op.

11



De lijn p gaat door het punt $C(-18, 30)$ en is evenwijdig met de lijn

$q: y = -\frac{1}{3}x$.

- a Stel de formule van p op.

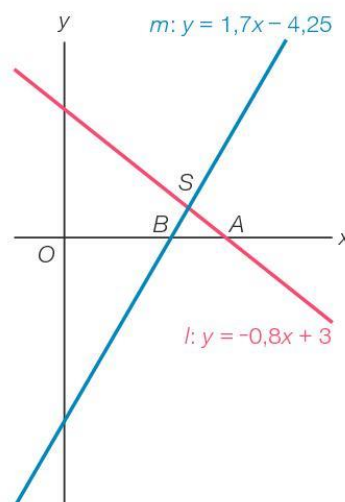
- b Bereken de coördinaten van de punten waarin p de x -as en de y -as snijdt.

12



Gegeven zijn de lijnen $l: y = -0,8x + 3$ en $m: y = 1,7x - 4,25$. Zie figuur 1.6.

- Bereken de coördinaten van het snijpunt S .
- De lijn l snijdt de x -as in het punt A .
Bereken de coördinaten van A .
- De lijn m snijdt de x -as in het punt B .
Bereken de coördinaten van B .



figuur 1.6

13



Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen

- $l: y = 2(x - 3)$ en $m: y = 5 - 3x$
- $p: y = \frac{2}{3}x + 11$ en $q: y = -1\frac{1}{2}x - 15$
- $r: y = -2\frac{1}{2}x + 5$ en $s: y = 25$.

A14



De lijn p gaat door het punt $A(18, -27)$ en is evenwijdig met de lijn $n: y = -2,5x + 35$.

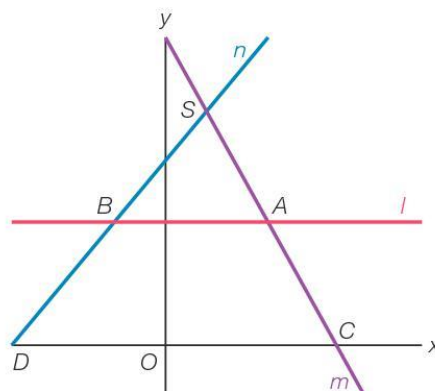
- Stel de formule van p op.
- De lijn n snijdt de x -as in het punt P en de y -as in het punt Q .
Bereken de coördinaten van P en Q .
- Op n ligt het punt R met x -coördinaat $x_R = -20$.
Bereken de y -coördinaat y_R .
- Op n ligt het punt S met y -coördinaat $y_S = 45$.
Bereken de x -coördinaat x_S .
- Op n ligt het punt T waarvan de x -coördinaat gelijk is aan de y -coördinaat.
Bereken de coördinaten van T .

A15



Hiernaast zie je de lijnen $l: y = 2,4$, $m: y = -1,8x + 6$ en $n: y = 1,2x + 3,6$.

- Bereken de coördinaten van het snijpunt S van m en n .
- De lijn l snijdt m en n in de punten A en B .
Bereken de lengte van het lijnstuk AB .
- De lijn m snijdt de x -as in het punt C en n snijdt de x -as in het punt D .
Bereken de lengte van het lijnstuk CD .



figuur 1.7

Terugblik

Lineaire formules

Bij een lineair verband tussen x en y hoort als grafiek een rechte lijn.

De bijbehorende formule heeft de vorm $y = ax + b$. Hierin is a de richtingscoëfficiënt.

$rc = a$ betekent: 1 naar rechts en a omhoog.

Het snijpunt van de lijn met de y -as is het punt $(0, b)$.

Horizontale en verticale lijnen

De lijn k : $y = 4$ is de horizontale lijn door het punt $(0, 4)$.

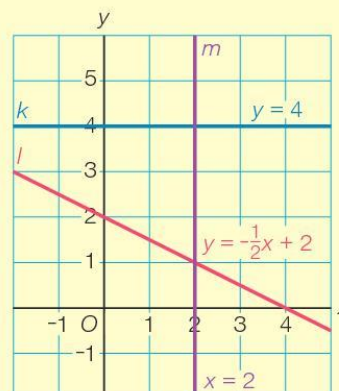
De lijn m : $x = 2$ is de verticale lijn door het punt $(2, 0)$.

Grafiek tekenen bij een lineaire formule

Om de lijn l : $y = -\frac{1}{2}x + 2$ te tekenen, maak je een tabel

met twee 'mooie' punten, bijvoorbeeld

x	0	2
y	2	1



Evenwijdige lijnen

De formule van de lijn k door het punt $(2, 3)$ die evenwijdig is met de lijn p : $y = 4x - 6$ stel je als volgt op.

Evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, dus

$rc_k = rc_p = 4$.

$$k: y = ax + b \text{ met } a = 4, \text{ dus } y = 4x + b \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 2 + b = 3 \\ 8 + b = 3 \\ b = -5 \end{array} \right.$$

Dus k : $y = 4x - 5$.

Snijpunten van lijnen

De lijnen l : $y = 3,5x + 7$ en m : $y = -1,5x + 22$ snijden elkaar in het punt S .

De x -coördinaat van S is de oplossing van de vergelijking

$$3,5x + 7 = -1,5x + 22.$$

Dit geeft $3,5x + 7 = -1,5x + 22$

$$5x = 15$$

$$x = 3$$

$x_S = 3$ geeft $y_S = 3,5 \cdot 3 + 7 = 17,5$

Dus $S(3; 17,5)$.

De coördinaten van het snijpunt T van de lijn l : $y = 3,5x + 7$ met de x -as vind je door het oplossen van de vergelijking $y = 0$, dus van $3,5x + 7 = 0$.

Je krijgt $3,5x = -7$ en dit geeft $x = -2$, dus $T(-2, 0)$.

A16
□ ⊗ *

Baarzen kunnen leven in water waarvan de temperatuur maximaal 25°C is. Bovendien hebben ze minstens 2 mg zuurstof per liter water nodig. We bekijken in deze opgave baarzen die leven in een meer waarvan de diepte 4 meter is.

Aan het begin van een lange hete zomer is op 1 juli de temperatuur van het water alleen aan de oppervlakte 25°C .

Gedurende de zomer komt de diepte waarop de temperatuur 25°C is elke drie dagen 10 cm lager te liggen. Op 1 juli is overal in het meer voldoende zuurstof aanwezig. Vanaf dat moment ontwikkelt zich door rotting van organismen op de bodem een steeds dikkere laag met te weinig zuurstof. Deze laag neemt vanaf 1 juli elke dag met 5 cm toe.

In deze opgave is d_T de diepte waarop de temperatuur 25°C is en d_Z de diepte waarboven er voldoende zuurstof voor de baarzen is. Neem t in dagen met $t = 0$ op 1 juli en de diepte d in meter. Aan het wateroppervlak is dus $d = 0$ en op de bodem van het meer is $d = 4$.

- a Stel de formule op van d_T na t dagen.
- b Stel de formule op van d_Z na t dagen.
- c Teken de grafieken bij de formules van de vragen a en b voor de periode van 1 juli tot en met 31 augustus en onderzoek met behulp van deze grafieken vanaf welke datum de baarzen niet meer in het meer kunnen leven.



$t = 0$ is op 1 juli
 $t = 30$ is op 31 juli
 $t = 31$ is op 1 augustus
 $t = 61$ is op 31 augustus

E17
*

Gegeven zijn de punten $A(0, 1)$ en $B(0, 10)$.

Lijn k gaat door A en $rc_k = \frac{1}{3}$.

Lijn l gaat door A en $rc_l = 1\frac{1}{2}$.

Lijn m gaat door B en $rc_m = -1\frac{1}{3}$.

Lijn m snijdt k in het punt C en l in het punt D .

Onderzoek hoeveel roosterpunten er binnen driehoek ACD liggen.

Terugblik

Lineaire formules

Bij een lineair verband tussen x en y hoort als grafiek een rechte lijn.

De bijbehorende formule heeft de vorm $y = ax + b$. Hierin is a de richtingscoëfficiënt.

$rc = a$ betekent: 1 naar rechts en a omhoog.

Het snijpunt van de lijn met de y -as is het punt $(0, b)$.

Horizontale en verticale lijnen

De lijn k : $y = 4$ is de horizontale lijn door het punt $(0, 4)$.

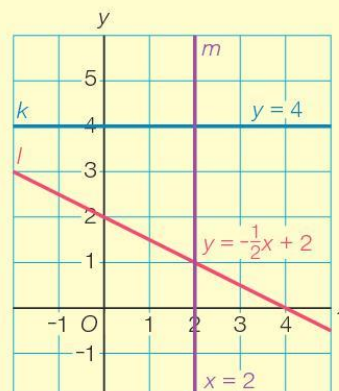
De lijn m : $x = 2$ is de verticale lijn door het punt $(2, 0)$.

Grafiek tekenen bij een lineaire formule

Om de lijn l : $y = -\frac{1}{2}x + 2$ te tekenen, maak je een tabel

met twee 'mooie' punten, bijvoorbeeld

x	0	2
y	2	1



Evenwijdige lijnen

De formule van de lijn k door het punt $(2, 3)$ die evenwijdig is met de lijn p : $y = 4x - 6$ stel je als volgt op.

Evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, dus

$$rc_k = rc_p = 4.$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = 4, \text{ dus } y = 4x + b \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 2 + b = 3 \\ 8 + b = 3 \\ b = -5 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } k: y = 4x - 5.$$

Snijpunten van lijnen

De lijnen l : $y = 3,5x + 7$ en m : $y = -1,5x + 22$ snijden elkaar in het punt S .

De x -coördinaat van S is de oplossing van de vergelijking

$$3,5x + 7 = -1,5x + 22.$$

$$\text{Dit geeft } 3,5x + 7 = -1,5x + 22$$

$$5x = 15$$

$$x = 3$$

$$x_S = 3 \text{ geeft } y_S = 3,5 \cdot 3 + 7 = 17,5$$

$$\text{Dus } S(3; 17,5).$$

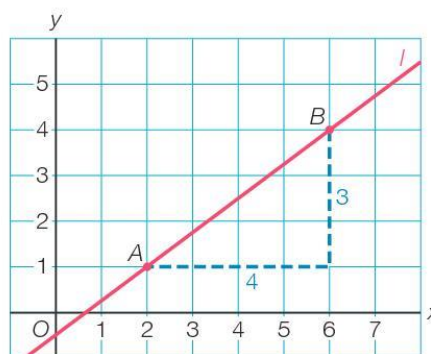
De coördinaten van het snijpunt T van de lijn l : $y = 3,5x + 7$ met de x -as vind je door het oplossen van de vergelijking $y = 0$, dus van $3,5x + 7 = 0$.

Je krijgt $3,5x = -7$ en dit geeft $x = -2$, dus $T(-2, 0)$.

1.2 Een lijn door twee gegeven punten

018 De lijn l gaat door de punten $A(2, 1)$ en $B(6, 4)$.
□ ⊗ * Zie figuur 1.8.

- Voor de lijn l geldt:
ga je 4 naar rechts, dan ga je 3 omhoog, dus
ga je 1 naar rechts, dan ga je ...
Dus $rc_l = \dots$
- In figuur 1.8 is $x_B - x_A = 6 - 2 = 4$.
Hoeveel is $y_B - y_A$?
- Hoe kun je met $x_B - x_A$ en $y_B - y_A$ de richtingscoëfficiënt van l berekenen?



figuur 1.8

Theorie A Richtingscoëfficiënt berekenen

Bij de opgaven die hierna komen heb je regelmatig je rekenmachine nodig. We gaan ervan uit dat je over een grafische rekenmachine (GR) beschikt. Om hiermee te leren werken, neem je af en toe een module uit de handleiding GR door. Deze handleiding vind je in Getal & Ruimte online.

[► GR] Neem de module **Berekeningen op het basisscherm** door.

De lijn l in figuur 1.9 gaat door de punten A en B .

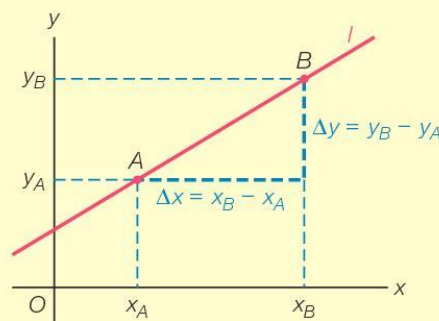
Ga je $x_B - x_A$ naar rechts, dan ga je $y_B - y_A$ omhoog. Dus ga je 1 naar rechts, dan ga je

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ omhoog.

Je ziet dat

$$rc_l = \frac{\text{verschil van de y-coördinaten}}{\text{bijbehorende verschil van de x-coördinaten}}.$$

Voor het verschil van de twee y-coördinaten schrijven we Δy en voor het bijbehorende verschil van de x-coördinaten Δx .



figuur 1.9

Van de lijn $y = ax + b$ door de punten A en B is de richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

In het voorbeeld wordt gevraagd om een **vergelijking van de lijn l** door de punten A en B op te stellen. We gebruiken de begrippen formule van een lijn en vergelijking van een lijn door elkaar.

Δ is de Griekse hoofdletter D, de eerste letter van differentie (= verschil). Spreek Δ uit als delta.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de lijn l door de punten $A(2, -1)$ en $B(6, 5)$.

Uitwerking

$$y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - (-1)}{6 - 2} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -1 \\ 3 + b = -1 \\ b = -4 \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = 1\frac{1}{2}x - 4.$$

R19 Zie het voorbeeld.



a Lotte neemt $\Delta y = -1 - 5$.

Welke Δx hoort daarbij? Krijgt ze ook $rc_l = 1\frac{1}{2}$?

b Lars gebruikt de coördinaten van het punt B om b te berekenen in $y = 1\frac{1}{2}x + b$.

Welke berekening hoort daarbij?

20



Stel de formule op van de lijn

a l door $A(-1, 1)$ en $B(1, 4)$

b m door $C(-3, 5)$ en $D(2, 0)$

c n door $E(5, 3)$ en $F(-7, 3)$

d p door $G(1, -3)$ en $H(5, 5)$.

21



Stel de formule op van de lijn

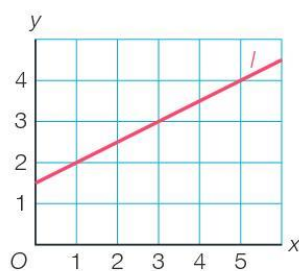
a l door $P(180, 360)$ en $Q(160, 250)$

b m door $R(15, 73)$ en $S(45, 58)$.

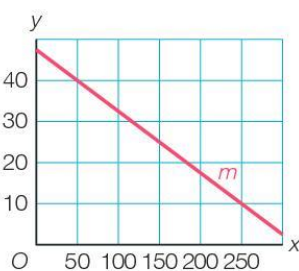
22



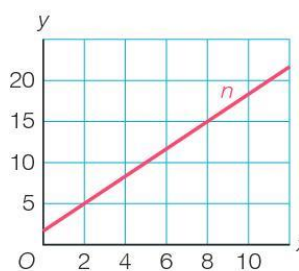
Stel van elke lijn in figuur 1.10 de formule op. Lees eerst de coördinaten van twee 'mooie' punten af.



a



b



c

figuur 1.10

A23



Stel een vergelijking op van de lijn

a m door de punten $A(-23, -125)$ en $B(17, 155)$

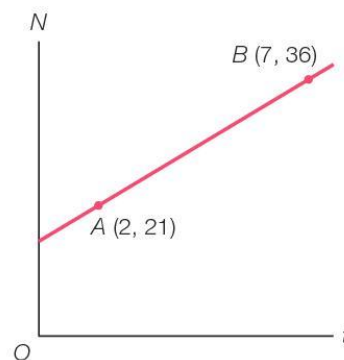
b p door de oorsprong die evenwijdig is met de lijn door de punten $C(18, -27)$ en $D(12, -30)$

c q door het punt $E(-8, 14)$ die evenwijdig is met de lijn door de punten $O(0, 0)$ en $F(-12, 4)$.

A24 De lijn k gaat door de punten $A(2, 22)$ en $B(12, 7)$ en de lijn l gaat door de punten $C(4, 3)$ en $D(20, 43)$. Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l .

A25 De lijn k gaat door de punten $A(p, 2p)$ en $B(3p, 3p)$. Bereken de coördinaten van de snijpunten van k met de assen.

O26 Stel een vergelijking op van de lijn in de figuur hiernaast.



figuur 1.11

Theorie B Lineaire formules in de praktijk

In de praktijk zijn er heel wat verbanden tussen grootheden te benaderen door een lineaire formule.

Bij toepassingen gebruik je vaak andere letters dan x en y . Zo geeft de formule $B = 0,11d + 80$ aan dat er een **lineair verband** is tussen de huurprijs B van een auto en het aantal kilometers d dat je met de auto rijdt. In deze formule is B een **lineaire functie** van d .

We zeggen ook dat B is **uitgedrukt in** d .

Is R een lineaire functie van q , dan is $R = aq + b$ met $a = \frac{\Delta R}{\Delta q}$.

Is T een lineaire functie van t , dan is $T = at + b$ met $a = \frac{\Delta T}{\Delta t}$.

Voorbeeld

Een marktkoopman verkoopt T-shirts. De ervaring leert dat bij een prijs van 5 euro er per week 90 T-shirts verkocht worden. Bij een prijs van 8 euro is de weekverkoop nog maar 30 stuks. Er bestaat een lineair verband tussen de prijs p in euro's van een T-shirt en de weekverkoop q . Druk q uit in p .

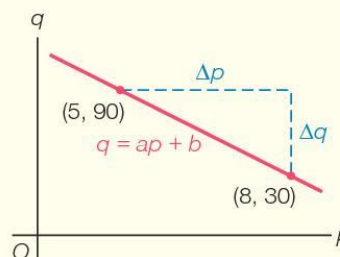
Uitwerking

$$q = ap + b \text{ met } a = \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bij } p = 5 \text{ hoort } q = 90. \\ \text{Bij } p = 8 \text{ hoort } q = 30. \end{array} \right\} a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{30 - 90}{8 - 5} = -20$$

$$\left. \begin{array}{l} q = -20p + b \\ p = 5 \text{ en } q = 90 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -20 \cdot 5 + b = 90 \\ -100 + b = 90 \\ b = 190 \end{array}$$

Dus $q = -20p + 190$.



27



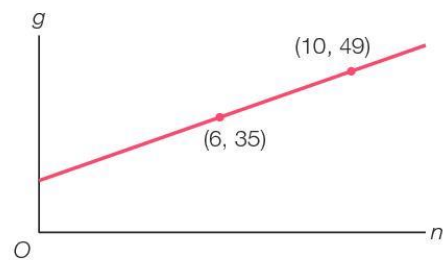
Tussen F en n bestaat een lineair verband. Bij $n = 150$ hoort $F = 7,75$ en bij $n = 425$ hoort $F = 2,25$.

- Druk F uit in n .
 - Om n uit te drukken in F kun je op twee manieren te werk gaan:
 - Gebruik het antwoord van vraag a.
 - Begin als volgt: $n = aF + b$ met $a = \frac{\Delta n}{\Delta F}$.
- Werk beide manieren uit.
- Bereken F voor $n = 250$ en bereken n voor $F = 4,25$.

28



- Tussen K en m bestaat een lineair verband. Voor $m = 5$ is $K = 10$ en voor $m = 12$ is $K = 115$. Schrijf K als functie van m .
- F is een lineaire functie van R . Voor $R = 15$ is $F = 300$ en voor $R = 42$ is $F = 138$. Stel de formule op van F .
- Zie de lijn in de figuur hiernaast. Stel een vergelijking op van deze lijn.



figuur 1.12

29



Tijdens een vlucht van de Airbus A310 is er na 250 km vliegen 56 ton kerosine in de brandstoftanks aanwezig, 400 km verder is dat nog 49,6 ton.

Er bestaat een lineair verband tussen de aanwezige hoeveelheid kerosine k in ton en de vluchtafstand V in km.

- Druk k uit in V .

Als veiligheidsmaatregel gaat er in de cockpit een alarm af als er in de tanks nog maar 5 ton kerosine zit.

- Hoeveel km na de start gaat het alarm af? Hoeveel km kan er dan nog gevlogen worden?





Iedereen die in Nederland woont moet belasting betalen over het inkomen. Er bestaan drie categorieën in de inkomstenbelasting: box 1 (werk en woning), box 2 (aanmerkelijk belang) en box 3 (sparen en beleggen). In deze opgave gaat het over de tarieven die gelden voor box 1, dus over het belastbaar inkomen uit werk en woning. We bekijken de tarieven van 2019 voor mensen die de AOW-leeftijd nog niet hebben bereikt. De te betalen belasting wordt per schijf naar beneden afgerond op gehele euro's, maar daar houden we in deze opgave geen rekening mee.

In box 1 zijn 4 belastingschijven. Zie de tabel.

belastingsschijf	belastbaar inkomen box 1	belastingpercentage
1 ^e schijf	tot 20 384 euro	36,65%
2 ^e en 3 ^e schijf	van 20 384 tot 68 507 euro	38,10%
4 ^e schijf	vanaf 68 507 euro	...

Als je 20 384 euro per jaar verdient, betaal je alleen belasting in schijf 1. Dit bedrag is € 7470,74.

a Licht dit bedrag toe met een berekening.

Als je 25 000 euro per jaar verdient, dan betaal je over de eerste 20 384 euro 36,65% belasting en over $25\,000 - 20\,384 = 4616$ euro 38,10% belasting.

Je betaalt dan in box 1 in totaal

$0,3665 \cdot 20\,384 + 0,3810 \cdot 4616 = €9229,43$ belasting.

b Meneer Asten had over 2019 een belastbaar inkomen in box 1 van 50 000 euro.

Bereken hoeveel belasting in box 1 meneer Asten moest betalen.

c Mevrouw Bastet moest over 2019 in box 1 precies 18 000 euro betalen.

Bereken het belastbaar inkomen uit werk en woning van mevrouw Bastet.

De familie Colijn had in 2019 een belastbaar inkomen in box 1 van 100 000 euro. Ze moesten daarover in totaal € 42 103,23 euro belasting betalen.

De formule van de belasting B in euro's die je in 2019 betaalt in box 1 in schijf 4 is te schrijven in de vorm $B = ai + b$. Hierin is i het inkomen in box 1 met $i \geq 68\,507$.

d Stel de formule op van B .

e De familie Donkers moest over 2019 in box 1 aan belasting 60 000 euro betalen. Bereken het belastbaar inkomen uit werk en woning van de familie Donkers.



A31

De volwassen Nederlander wordt gemiddeld steeds langer en zwaarder.

In 1986 had de Nederlandse man een gemiddelde lengte van 177,5 cm en een gemiddeld gewicht van 77,6 kg. In 2016 was dat 181,1 cm en 84,5 kg.

De Nederlandse vrouw woog in 2020 gemiddeld 72,0 kg. Dat was 4,5 kg meer dan in 1995. In 2020 was de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw 167,5 cm. Dat was 1,3 cm meer dan in 1994.

Neem in deze opgave aan dat er lineaire verbanden bestaan tussen de tijd t in jaren en het gewicht in kg, en tussen t en de lengte in cm. Neem bovendien aan dat deze lineaire verbanden ook de komende jaren gelden. Neem $t = 0$ in het jaar 1980.

- a** Stel de formule op
- van het gemiddelde gewicht G_m van de Nederlandse man,
 - van het gemiddelde gewicht G_v van de Nederlandse vrouw,
 - van de gemiddelde lengte L_m van de Nederlandse man en
 - van de gemiddelde lengte L_v van de Nederlandse vrouw als functie van t .

Mannen zijn gemiddeld zwaarder dan vrouwen. In 2012 was het verschil 13 kg.

- b** Bereken in welk jaar dit verschil 14 kg zal zijn. Wat is dan het gemiddelde gewicht van de Nederlandse man?
- c** Bereken de gemiddelde lengte van de Nederlandse man in het jaar dat de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw 168 cm is.

Een bekende maat om na te gaan of er sprake is van gezond gewicht of overgewicht is de Body Mass Index (BMI). De BMI bereken je met de formule $BMI = \frac{\text{gewicht}}{\text{lengte}^2}$. Hierin is het gewicht in kg en de lengte in meter.

Bij een BMI van 18,5 tot 25 is sprake van normaal gewicht, bij 25 tot 27 is er licht overgewicht en bij 27 tot 30 is er matig overgewicht.

Bram beweert dat tussen 1990 en 2020 de BMI van de Nederlandse man meer gestegen is dan de BMI van de Nederlandse vrouw.

- d** Onderzoek of Bram gelijk heeft.

E32

Een koudwaterkraan, geheel geopend, vult een vat in 10 minuten. Een warmwaterkraan, ook geheel geopend, vult hetzelfde vat in 12 minuten. Een stop in de bodem van het vat zorgt ervoor dat het vat niet leegloopt. Als de stop eruit is, loopt een vol vat in 20 minuten helemaal leeg.

Als nu bij een leeg vat beide kranen geheel opengezet worden en ook de stop uit de bodem getrokken wordt, hoeveel minuten duurt het dan tot het vat vol is?



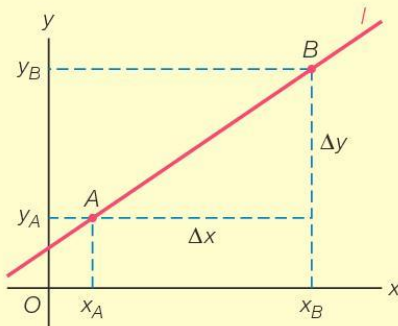
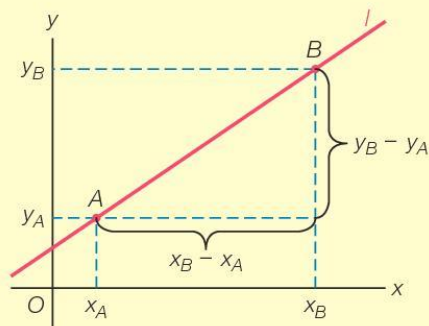
Terugblik

De formule van een lijn door twee gegeven punten

Van de lijn $y = ax + b$ is de richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Als de coördinaten van twee punten A en B bekend zijn, dan is

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$



Bij de lijn l door de punten $A(2, -2)$ en $B(6, 0)$ krijg je

$$rc_l = \frac{0 - (-2)}{6 - 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \text{ Dus } l: y = \frac{1}{2}x + b.$$

Door de coördinaten van A in de formule van l in te vullen, bereken je b .

Zo krijg je $\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -2$ en dit geeft $b = -3$.

Dus een vergelijking van de lijn l is $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Om b te berekenen had je ook de coördinaten van B kunnen gebruiken.

In plaats van een vergelijking van de lijn is $y = \frac{1}{2}x - 3$ zeggen we ook wel de formule van de lijn is $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Bij toepassingen kom je vaak andere letters tegen, bijvoorbeeld

$$r = as + b \text{ met } a = \frac{\Delta r}{\Delta s}.$$

Is v een lineaire functie van t , hoort $v = 20$ bij $t = 3$ en hoort $v = 12$

bij $t = 13$, dan is $v = at + b$ met $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12 - 20}{13 - 3} = \frac{-8}{10} = -0,8$.

$$\left. \begin{array}{l} v = -0,8t + b \\ t = 3 \text{ en } v = 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,8 \cdot 3 + b = 20 \\ -2,4 + b = 20 \\ b = 22,4 \end{array}$$

Dus $v = -0,8t + 22,4$.

Hiermee is v uitgedrukt in t .

1.3 Interpoleren, extrapoleren en evenredigheid

033



Van een persoon is gedurende een groot aantal jaren zowel de lichaamslengte als het gewicht bijgehouden. Zie de tabel.

LENGTE EN GEWICHT

lengte L in cm	60	80	100	120	140	160	180
gewicht G in kg	6	11	16	22	32	50	65

- Teken de punten die uit de tabel volgen en teken door de punten een vloeiende kromme.
- Gebruik de grafiek om een schatting te geven van het gewicht bij een lengte van 155 cm.
- Schat de lengte bij een gewicht van 25 kg.
- Kun je met deze gegevens de lengte schatten bij een gewicht van 100 kg? Licht toe.



figuur 1.13

Theorie A Interpoleren en extrapoleren

Bij een tabel met waarnemingsresultaten kun je tussenliggende waarden schatten. Dat heet **interpoleren**. Bij **extrapoleren** geef je een schatting van een waarde die buiten de waarnemingen ligt.

In opgave 33 ben je bij het interpoleren en extrapoleren uitgegaan van een grafiek. We spreken dan van **grafisch interpoleren** en **grafisch extrapoleren**.

Interpoleren: schatten van een tussenliggende waarde.

Extrapoleren: schatten van een waarde die buiten de gegevens ligt.

Behalve grafisch interpoleren en extrapoleren, kun je ook interpoleren en extrapoleren met behulp van een berekening. Ga je hierbij uit van een lineair verband, dan heet dat **lineair interpoleren** of **lineair extrapoleren**.

Zie de tabel hiernaast. Om met lineair interpoleren y te schatten bij $x = 9$ ga je als volgt te werk.

Als x toeneemt van 7 naar 12, dan neemt y toe van 1 naar 4.

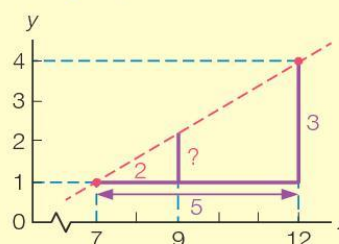
Dus bij $\Delta x = 5$ hoort $\Delta y = 3$.

Hieruit volgt dat bij $\Delta x = 1$ hoort $\Delta y = \frac{3}{5} = 0,6$,

dus bij $\Delta x = 2$ hoort $\Delta y = 2 \cdot 0,6$.

De schatting van y bij $x = 9$ is $y = 1 + 2 \cdot 0,6 = 2,2$.

x	7	12
y	1	4



Voorbeeld

Gegeven is de volgende tabel.

jaar	1995	2002	2006	2011	2020
aantal	670	508	281	220	193

- a Bereken het aantal in 2009 met lineair interpoleren. Rond af op gehele.
- b Bereken het aantal in 2027 met lineair extrapoleren. Rond af op gehele.

Aanpak

- a 2009 ligt tussen 2006 en 2011, dus gebruik het gedeelte van de tabel dat hiernaast staat.

jaar	2006	2011
aantal	281	220

+5
-61

- b Gebruik de laatste ontwikkeling om het aantal te berekenen in 2027, dus gebruik het gedeelte van de tabel dat hiernaast staat.

jaar	2011	2020
aantal	220	193

+9
-27

Uitwerking

- a In 5 jaar 61 minder, dus in 1 jaar $\frac{61}{5}$ minder.
2009 is 3 jaar na 2006, dus in 2009 is het aantal $281 - 3 \cdot \frac{61}{5} \approx 244$.
- b In 9 jaar 27 minder, dus in 1 jaar $\frac{27}{9} = 3$ minder.
2027 is 7 jaar na 2020, dus in 2027 is het aantal $193 - 7 \cdot 3 = 172$.

R34

Zie het voorbeeld.



Jos berekent het aantal in 2009 door de formule op te stellen van een lijn. Hij krijgt de lijn $N = -12,2t + 281$.

- a Licht deze formule toe en gebruik deze formule om het aantal in 2009 te berekenen.
- b Stel de formule op van de lijn waarmee je het aantal in 2027 kunt berekenen.

35



Rond in deze opgave af op twee decimalen.

Gegeven is de tabel hiernaast.

Bereken y met lineair interpoleren of lineair extrapoleren bij

- a $x = 48$
- b $x = 97$
- c $x = 123$.

x	31	46	78	90	103
y	0,7	2,5	6,0	8,4	9,8

36



Gegeven is de tabel hiernaast.

- a Bereken g met lineair interpoleren bij $L = 3,91$.
Rond af op één decimaal.
- b Bereken g met lineair extrapoleren bij $L = 15,60$.
Rond af op één decimaal.
- c Bereken L met lineair interpoleren bij $g = 21,9$.
Rond af op één decimaal.

L	3,62	4,83	6,12	9,81
g	6,7	11,3	18,7	27,1

37



Op een winterse dag was de temperatuur om 7:00 uur $-4,5^{\circ}\text{C}$. Vier uur later, dus om 11:00 uur, was de temperatuur gestegen tot $2,3^{\circ}\text{C}$.

- a Bereken met lineair interpoleren de temperatuur om 9:30 uur.
- b Bereken met lineair extrapoleren de temperatuur om 14:00 uur.
- c Waarom is lineair extrapoleren niet toegestaan als je de temperatuur om 20:00 uur wilt schatten?

A38



In de tabel staat informatie over het aantal meldingen van hepatitis A en tuberculose (tbc) in Nederland.

AANTAL MELDINGEN HEPATITIS A EN TUBERCULOSE IN NEDERLAND

jaar	1970	1990	2000	2016
hepatitis A	3789	771	658	81
tuberculose	2570	1369	1443	889

- a Bereken met lineair interpoleren het aantal meldingen van hepatitis A in 2010.
- b Bereken met lineair interpoleren het aantal meldingen van tbc in 2015.
- c Het aantal meldingen van tbc vertoont wel een dalende trend, maar soms neemt het aantal meldingen toch nog toe ten opzichte van het jaar ervoor. Neem eens aan dat je alleen over de gegevens van 1970 en 2016 zou beschikken.
In welk jaar zouden er dan volgens lineair extrapoleren geen meldingen meer zijn van tbc in Nederland?

INFORMATIEF

Hepatitis A en tuberculose

Hepatitis A is een leverontsteking die wordt veroorzaakt door het hepatitis A-virus. Mensen raken besmet door contact met zieken of door voedsel of water dat verontreinigd is met ontlasting die het virus bevat. De kans op besmetting neemt toe naarmate de hygiënische omstandigheden slechter zijn. Er is geen behandeling met medicijnen voor hepatitis A. Wel is het

mogelijk om te vaccineren om de ziekte te voorkomen.

De infectieziekte tuberculose (tbc) wordt veroorzaakt door een bacterie. Bij niet of niet goed behandelen kan de ziekte dodelijk zijn. Wereldwijd is tuberculose een groot probleem. In landen waar tuberculose vaak voorkomt, wordt tegen de ziekte gevaccineerd.

A39

*

Het aantal Nederlanders van 100 jaar en ouder (honderdjarigen) neemt voortdurend toe. Daarnaast neemt het aantal honderdjarige mannen ten opzichte van het aantal honderdjarige vrouwen ook toe. Zie de tabel. De gegevens van 2024 zijn prognoses. Je ziet dat in 2017 één van de zeven honderdjarigen man is.

AANDEEL MANNEN VAN HONDERDJARIGEN OP 1 JANUARI

jaar	aandeel mannen
2017	1 van de 7
2024	3 van de 17

Bereken met lineair extrapoleren in welk jaar één van de vijf honderdjarigen man is.

O40

□ ⊗ *

Gegeven is de verhoudingstabel hiernaast.

a Noem een bijzonderheid van een verhoudingstabel.

b Teken de grafiek bij deze verhoudingstabel.

Welke bijzonderheid heeft de grafiek?

c Welke formule hoort bij de grafiek? Kies uit $y = 0,4x^2$, $y = 0,4x$ en $y = x + 0,4$.

x	1	3	5	8	10
y	0,4	1,2	2	3,2	4

Theorie B Recht evenredig

Een machine levert 560 flessen af in vier minuten.

De volgende **verhoudingstabel** past bij deze situatie.

tijd t in minuten	4	8	1	3	...
aantal flessen N	560	1120	140	420	...

$\begin{matrix} & \text{:4} & & \text{\(\times 2\)} & & \\ & \text{\(\times 2\)} & & & & \text{\(\times 2\)} \\ & & \text{\(\times 2\)} & & & \\ & & & \text{\(\times 2\)} & & \\ & & & & \text{\(\times 2\)} & \\ & & & & & \text{\(\times 2\)} \end{matrix}$

De grafiek die bij deze verhoudingstabel hoort, zie je in figuur 1.14.

De grafiek is een rechte lijn door het punt $O(0, 0)$ met richtingscoëfficiënt 140. De formule is $N = 140t$.

Vermenigvuldig je in de verhoudingstabel de tijd t met een getal k , dan moet je N ook met k vermenigvuldigen.

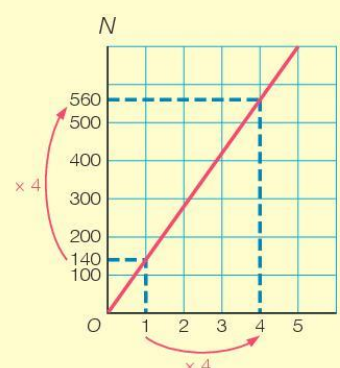
We zeggen dat N **evenredig** is met t . In plaats van

N is evenredig met t

zeggen we ook

N is **recht evenredig** met t .

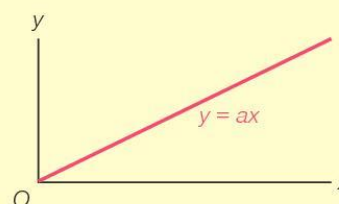
Bij evenredige grootheden hoort een verhoudingstabel.



figuur 1.14

y is (recht) evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
- De bijbehorende tabel is een verhoudingstabel.
- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.



Voorbeeld

- a** Gegeven is dat y evenredig is met x . Voor $x = 8$ is $y = 12$.
Bereken y voor $x = 30$.
- b** Gegeven is dat N evenredig is met t . Bij $t = 12$ hoort $N = 99$.
Stel de formule van N op.

Uitwerking

- a** $\frac{8}{12} \mid \frac{30}{y}$ dus $y = \frac{12 \cdot 30}{8} = 45$
- b** N is evenredig met t , dus $N = at$.
Bij $t = 12$ hoort $N = 99$.
- $$\left. \begin{array}{l} a \cdot 12 = 99 \\ 12a = 99 \\ a = 8,25 \end{array} \right\}$$

Dus $N = 8,25t$.

Verhoudingstabel, dus
gelijke kruisproducten.
 $8 \cdot y = 12 \cdot 30$

41 Gegeven is dat y evenredig is met x .



- a** Voor $x = 15$ is $y = 23$.
Bereken y voor $x = 60$.
- b** Voor $x = 6$ is $y = 3,6$.
Bereken x voor $y = 30,6$.
- c** Voor $x = 128$ is $y = 56$.
Bereken y voor $x = 520$.

42



- De bewoners van appartementencomplex 'Zuiderwal' hebben te maken met gemeenschappelijke servicekosten. De afspraak is deze kosten evenredig te verdelen op basis van de vloeroppervlakte.
- De familie De Jager heeft een appartement met een vloeroppervlakte van 84 m^2 . Ze betalen jaarlijks 1890 euro aan servicekosten.
- a** Stel de formule op van de jaarlijkse servicekosten K in euro's bij een vloeroppervlakte van $A \text{ m}^2$.
- b** De familie Prieshof betaalt per jaar 2700 euro aan servicekosten. Hoeveel is de vloeroppervlakte van hun appartement?
- c** De familie Verbeek heeft een vloeroppervlakte van 75 m^2 , dat is 1,2% van de totale vloeroppervlakte van het complex.
Bereken de jaarlijkse servicekosten van het gehele appartementencomplex.

A43
□ ⊗ *

Pascal van Norden (Gouda, 5 september 1972) is een Nederlandse ultrarenner. Hij is gespecialiseerd in lange afstanden. In 2017 prolongeerde hij in Winschoten zijn titel Nederlands kampioen 100 km. Hij legde deze afstand af in 6 uur, 55 minuten en 10 seconden. Daarmee was zijn gemiddelde snelheid (afgerond op drie decimalen) gelijk aan 14,452 km/uur.

We vragen ons in deze opgave af hoe gelijkmatig Pascal tijdens deze race heeft gelopen. Als hij steeds even hard liep, moet er immers sprake zijn van een evenredig verband tussen de afgelegde afstand en de tijd. In de tabel zie je de tussentijden na telkens 10 km.

6 uur, 55 minuten en 10 seconden is

$$6 + \frac{55}{60} + \frac{10}{3600} = 6,919... \text{ uur.}$$

100 km in 6,919... uur,
dus gemiddelde snelheid is

$$\frac{100}{6,919...} \approx 14,452 \text{ km/uur.}$$

TUSSENTIJDEN BIJ DE KAMPIOENSRACE VAN PASCAL VAN NORDEN, 2017

afstand in km	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
tijd	40:25	1:21:08	2:01:36	2:41:42	3:22:03	4:02:50	4:44:26	5:27:44	6:11:35	6:55:10

Je kunt berekenen dat zijn gemiddelde snelheid tijdens de eerste 10 km gelijk was aan 14,845 km/uur.

- a** Licht dit toe met een berekening en bereken de gemiddelde snelheid in km/uur over de eerste 20 km en de eerste 30 km. Rond af op drie decimalen.

Je ziet dat de berekende gemiddelde snelheden niet precies aan elkaar gelijk zijn. Het gemiddelde van de drie in vraag a berekende snelheden is 14,813 km/uur. We nemen aan dat er een evenredig verband bestaat tussen de afgelegde afstand en de tijd als de gemiddelde snelheid niet meer dan 1% afwijkt van deze 14,813 km/uur. Dat betekent dat er een evenredig verband bestaat als de gemiddelde snelheid tussen 14,665 en 14,961 km/uur ligt.

- b** Bereken tot welke afstand het evenredige verband opgaat.

E44
*

Tess wil 100 bonbons kopen. De bonbons kosten 40 cent per stuk.

Bij het afrekenen krijgt zij te horen: 7 halen, maar 6 betalen. Tess heeft 40 euro bij zich.

Hoeveel geld houdt Tess over?

O45
□ ⊗ *

Bekijk de volgende situaties.

I Na afloop van een festival maken x personen het feestterrein in y minuten schoon.

II Na afloop van een festival verdienen x schoonmakers per uur samen y euro.

- a** Neem aan dat het aantal personen x vier keer zo groot is als aanvankelijk werd aangenomen.

Welk effect heeft dat in beide situaties op y ?

- b** In welke situatie is sprake van evenredige grootheden?

Theorie C Omgekeerd evenredig

Een zoutzuuroplossing met een concentratie van 8% betekent dat er 8 mL zoutzuur in 100 mL oplossing aanwezig is. De rest is water. Voeg je aan deze 100 mL nog eens 100 mL water toe, dan heb je 200 mL oplossing die 8 mL zoutzuur bevat. De concentratie is dan 4%. En zo krijg je na toevoeging van nog eens 200 mL water een oplossing met een concentratie van 2% zoutzuur. Dus maak je het volume k keer zo groot, dan wordt de concentratie k keer zo klein.

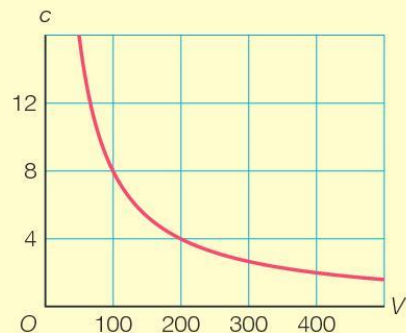
We zeggen dat de concentratie c **omgekeerd evenredig** is met het volume V .

In de volgende tabel zie je dat het product $c \cdot V$ telkens gelijk is aan 800.

V in mL	100	200	400	500	50
c in %	8	4	2	1,6	16
$c \cdot V$	800	800	800	800	800

In figuur 1.15 is de grafiek getekend bij de tabel. De grafiek is een (deel van een) **hyperbool**. Tussen c en V bestaat het **hyperbolische verband** $c \cdot V = 800$.

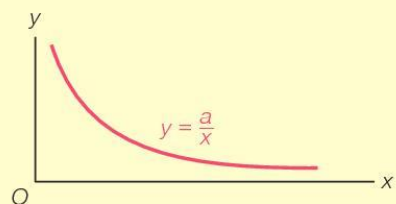
Je kunt dit verband ook schrijven met de formule $c = \frac{800}{V}$ of met de formule $V = \frac{800}{c}$.



figuur 1.15

y is omgekeerd evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y door hetzelfde getal delen.
- Het product xy is constant, dus $xy = a$, oftewel $y = \frac{a}{x}$.
- De grafiek is een hyperbool.



In het voorbeeld wordt gebruikt dat bij een oplossing van een stof in water de concentratie en het volume omgekeerd evenredig zijn.

Voorbeeld

In een apotheek heeft men alcohol in een oplossing van 95% (dus 95% alcohol en 5% water). Voor een klant is 750 mL oplossing nodig met 18% alcohol.

Hoe kan de apotheker deze oplossing krijgen?

Aanpak

Gebruik dat het product van het volume en de concentratie constant is.

Uitwerking

Voor de benodigde oplossing geldt $c \cdot V = 18 \cdot 750 = 13\,500$.

Gebruik van de aanwezige oplossing V mL, dan is $95 \cdot V = 13\,500$,

$$\text{dus } V = \frac{13\,500}{95} = 142,10\dots$$

Dus vul 142 mL van de aanwezige oplossing aan met water tot 750 mL.

46
□ ⊙ *

Zie het voorbeeld. Voor een andere klant heeft men 450 mL van 65% alcohol nodig.

- a** Hoeveel van de aanwezige voorraad moet worden aangevuld met water?

De apotheker heeft een waterstofperoxide-oplossing in voorraad van 3%. Een klant vraagt 500 mL waterstofperoxide met een concentratie van 0,2%.

- b** Hoeveel mL van de voorradige oplossing moet worden aangevuld met water?

47
□ ⊙ *

Snelheid is omgekeerd evenredig met de tijd.

- a** Licht dit toe met een voorbeeld.

Bij grote etappekoersen in het wielrennen maakt de wedstrijdleiding vaak enkele tijdschema's voor een etappe. Je hebt dan drie schema's: een langzaam schema, een snel schema en een schema daartussenin. Tijdens de koers houdt men in de gaten op welk schema gereden wordt. Bij een etappe in de Tour de France wordt gestart om 12:15 uur. Het langzame schema geeft aan dat bij een gemiddelde snelheid van 42 km/uur de finish om 17:30 uur is. De finish blijkt om 16:55 uur te zijn.

- b** Met welke gemiddelde snelheid is in deze etappe gereden?



48



Onderzoek in de Stille Oceaan heeft uitgewezen dat de watertemperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ omgekeerd evenredig is met de diepte d in km. Dit verband blijkt alleen te gelden voor diepten groter dan 500 meter. Op een diepte van 2500 meter is de watertemperatuur $1,6^{\circ}\text{C}$.

- Stel de formule op van de temperatuur T op een diepte van d km.
- Hoeveel is de watertemperatuur op 4835 meter diepte?
- Op welke diepte is de watertemperatuur $1,4^{\circ}\text{C}$?

T is omgekeerd evenredig met d , dus

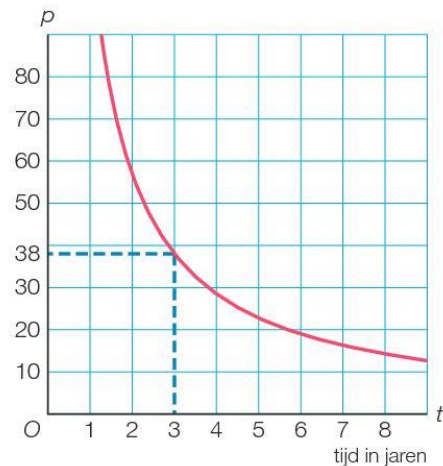
$$T = \frac{a}{d}.$$

49



Enkele jaren geleden vond in Chedabucto Bay bij Canada een olieramp plaats, waarbij veel olie op de stranden terecht kwam. Natuurlijke processen zorgen voor een afbraak van de olie. Onderzoek heeft uitgewezen dat het percentage p van de nog aanwezige olie omgekeerd evenredig is met de verstreken tijd t in jaren. Hierbij is $t > 1$. In de grafiek van figuur 1.16 vind je verdere informatie.

- Stel de formule op van het percentage p van de olie dat na t jaar nog aanwezig is.
- Hoeveel procent van de oorspronkelijke hoeveelheid olie is na 5,5 jaar nog aanwezig?
- Hoelang duurt het tot 95% van de olie is verdwenen?



figuur 1.16

A50



Bij de aanleg van spoorwegen moet in een bocht *verkanting* worden toegepast: de buitenste rail ligt iets hoger dan de binnenste rail. Hiermee wordt voorkomen dat de trein uit de bocht vliegt.

Het hoogteverschil h is omgekeerd evenredig met de straal r van de bocht. Bij een straal van 750 meter is het hoogteverschil 120 mm.

- Stel de formule op van het hoogteverschil h . Neem h in mm en r in meter.
- Hoeveel mm is het hoogteverschil bij een straal van 500 meter?
- In Nederland mag het hoogteverschil niet meer dan 15 cm zijn. Welke straal hoort bij een hoogteverschil van 15 cm?



Bij elke snelheid hoort een andere formule van h . Op het traject Keulen - Frankfurt geldt een hoogteverschil van maximaal 170 mm. Met dit hoogteverschil kan de ICE met een snelheid van 300 km/uur een bocht met een straal van 3320 meter nemen.

- Stel voor deze snelheid de formule van h op.



Kweker Jansma is gespecialiseerd in het kweken van rozen met het predicaat Toproos.

Jansma verkoopt deze rozen elke vrijdag op de veiling. Daar worden dan ook door andere kwekers rozen met het predicaat Toproos aangeboden. Het bedrag dat Jansma op een vrijdag met zijn Toprozen ontvangt, is bij een vaste prijs evenredig met het aantal rozen dat hij verkoopt. Maar de prijs is ook afhankelijk van het aantal rozen dat de andere kwekers aanbieden. Het blijkt dat de prijs omgekeerd evenredig is met het totaal aantal rozen dat de andere kwekers op de veiling aanbieden plus het aantal rozen dat Jansma aanbiedt.

In deze opgave is B het bedrag in euro's dat Jansma op een vrijdag voor zijn Toprozen ontvangt, a het aantal rozen dat hij op een vrijdag verkoopt en T het aantal rozen van de andere kwekers.

Op een vrijdag biedt Jansma 750 Toprozen aan en de andere kwekers 5000. Die vrijdag brengen zijn rozen per stuk 60 cent op.

Hieruit volgt dat geldt $B = \frac{3450a}{T+a}$.

- a Laat zien hoe je aan deze formule kunt komen.
- b Neem aan dat Jansma op de genoemde vrijdag niet 750 rozen op de veiling had aangeboden, maar 1000. De andere kwekers bieden nog steeds 5000 rozen aan. Hoeveel ontvangt Jansma dan per roos?
- c Op een vrijdag bieden de andere kwekers 8000 rozen aan. Het blijkt dat Jansma die vrijdag 35 cent per stuk voor zijn rozen ontvangt. Hoeveel rozen heeft Jansma die vrijdag op de veiling verkocht?
- d Toon aan dat het volgens de formule niet mogelijk is dat Jansma 50 cent per roos ontvangt als de andere kwekers op een vrijdag 8000 rozen aanbieden.



Terugblik

Interpoleren en extrapoleren

Met de tabel hiernaast kun je het aantal woningen in 1990 schatten.

Met lineair interpoleren gaat dat als volgt.

In 27 jaar 2552 meer, dus in 1 jaar $\frac{2552}{27}$ meer.

1990 is 19 jaar na 1971, dus in 1990 is het aantal

$3873 + 19 \cdot \frac{2552}{27} \approx 5669$ duizend woningen.

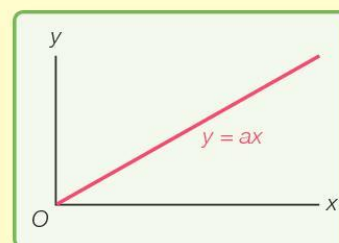
jaar	1930	1971	1998	2018
aantal woningen $\times 1000$	1824	3873	6425	7741

jaar	1971	1998
aantal	3873	6425

$+27$ (boven)
 $+2552$ (onder)

y is evenredig met x

- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De tabel is een verhoudingstabel.
- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
- De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.



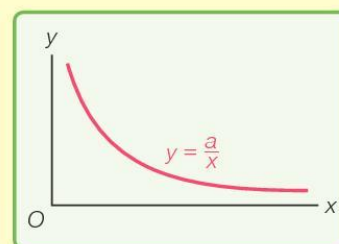
Het bedrag B in euro's dat Sabine verdient bij de supermarkt is evenredig met het aantal uur t dat ze werkt. Voor 4 uur werken krijgt ze 17 euro. De formule van B krijg je als volgt.

$$\left. \begin{array}{l} B = at \\ t = 4 \text{ en } B = 17 \end{array} \right\} a \cdot 4 = 17 \text{ oftewel } a = \frac{17}{4} = 4,25$$

Dus $B = 4,25t$.

y is omgekeerd evenredig met x

- De formule heeft de vorm $xy = a$ oftewel $y = \frac{a}{x}$.
- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y door dat getal delen.
- De grafiek is een hyperbool.



De bereidingstijd van vlees in een magnetron is omgekeerd evenredig met het ingestelde vermogen. Bij een vermogen V van 800 watt is de bereidingstijd T precies 4 minuten.

De formule van T krijg je als volgt.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Omgekeerd evenredig, dus } T = \frac{a}{V} \\ T = 4 \text{ en } V = 800 \end{array} \right\} \frac{a}{800} = 4 \text{ oftewel } a = 4 \cdot 800 = 3200$$

Dus $T = \frac{3200}{V}$.

1.4 Wiskundige modellen

052



Gegeven zijn vier formules en de bijbehorende grafieken.

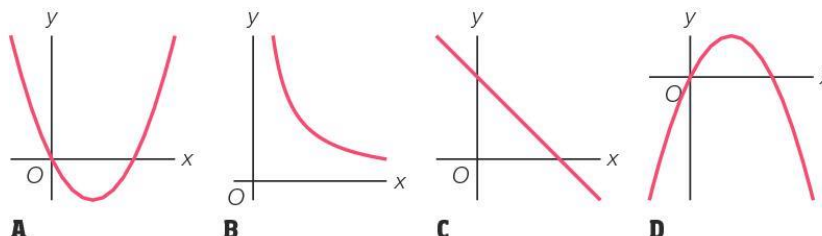
Zoek bij elke formule de juiste grafiek.

I $y = 2 - x$

II $y = \frac{2}{x}$

III $y = x^2 - 2x$

IV $y = 2x - x^2$



figuur 1.17

Theorie A Grafieken op de grafische rekenmachine

Formules als $y = -2x^2 + 8x + 3$ en $s = 6t^2 - t^3$ zijn voorbeelden van niet-lineaire formules. Je kunt de grafieken van zulke formules op het scherm van de GR laten tekenen. We zeggen dan dat we de grafieken **plotten**.

[►GR] Voordat je verder gaat, neem je de module **Formules en grafieken** van de handleiding GR door.

In deze module leer je hoe je een formule op de GR invoert, de grafiek plot, een tabel maakt en allerlei bijzonderheden van grafieken te weten komt.

Bij het plotten van grafieken is het van belang na te denken welke waarden van x en y op de assen kunnen voorkomen. Het scherm met deze waarden van x en y noemen we het **venster** van de GR. Bij het kiezen van een geschikt venster kunnen de volgende vuistregels van pas komen.

Vuistregels voor het vinden van een geschikt venster

- De kleinste en de grootste waarde van x volgen uit de gegevens of de context.
- Gebruik bij de TI ZoomFit en bij de Casio Auto om op het spoor te komen van geschikte waarden voor y . Bij de HP gebruik je het aanraakscherm om de y -waarden aan te passen.

Kies de y -waarden zo, dat de grafieken goed op het scherm komen.

We maken onderscheid tussen het plotten, het schetsen en het tekenen van een grafiek.

Plot de grafiek Laat de GR de grafiek op het scherm tekenen. Kies het venster zo, dat alle bijzonderheden van de grafiek op het scherm te zien zijn.	Schets de grafiek Maak in je schrift een schets van de grafiek. Het gaat alleen om de vorm van de grafiek en de ligging ten opzichte van de assen. Gebruik eventueel de GR.	Teken de grafiek Teken in je schrift nauwkeurig de grafiek en zet getallen bij de assen. Maak eerst een tabel. Gebruik daarbij de GR.
--	---	---

Bij berekeningen die je met de GR maakt, hoort een toelichting. Zo vermeld je de formules die je invoert en de gebruikte opties.

Afspraak

Bij gebruik van de GR

- noteer je welke formules je invoert
- noteer je welke opties je gebruikt.

Maak je berekeningen bij een formule die bij een praktische situatie hoort, let er dan op dat je de gestelde vraag beantwoordt. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

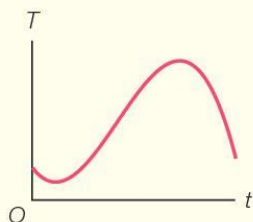
De temperatuur van het zeewater voor de Nederlandse kust wordt beschreven door de formule $T = -0,093t^3 + 1,39t^2 - 3,28t + 4,7$. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari en $0 \leq t \leq 12$.

- Schets de grafiek van T .
- Bereken de temperatuur op 1 juli. Rond af op één decimaal.
- In welke maand is de temperatuur van het zeewater minimaal? Wat is de minimale temperatuur?
- In welke maanden is de temperatuur van het zeewater 14°C ?

Uitwerking

- Voer in $y_1 = -0,093x^3 + 1,39x^2 - 3,28x + 4,7$.

$0 \leq t \leq 12$, dus neem in het venster x tussen 0 en 12.



- Bij 1 juli hoort $t = 6$.
 $t = 6$ geeft $T \approx 15,0^\circ\text{C}$
- De optie minimum geeft $x \approx 1,4$ en $y \approx 2,6$.
Dus in februari. De minimale temperatuur is $2,6^\circ\text{C}$.
- Voer in $y_2 = 14$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 5,7$ en $x \approx 10,8$.
Dus in de maanden juni en november.

$t = 0$ op 1 januari
 $t = 1$ op 1 februari
 $t = 2$ op 1 maart

53



Zie het voorbeeld.

- In welke maand is de temperatuur van het zeewater maximaal?
Wat is de maximale temperatuur?
- Hoeveel dagen ongeveer is de temperatuur boven 19°C ?

54



De bedrijfseconoom van een supermarktketen heeft een formule opgesteld die beschrijft hoeveel klanten er op elk tijdstip op een vrijdag in één van de vestigingen aanwezig zijn.

Deze formule is $N = -0,15t^4 + 3,35t^3 - 24t^2 + 65t$. Hierin is N het aantal klanten t uur na het openingstijdstip van 8:00 uur.



- Om de grafiek te plotten, kies je eerst een geschikt venster. Welke waarden voor x kies je hierbij? Licht toe en schets de grafiek van N .
- Hoe laat is het volgens de formule het drukst in de supermarkt? Hoeveel klanten zijn er dan?
- Hoe laat verlaten de laatste klanten de supermarkt?
- Hoe laat zijn er evenveel klanten in de supermarkt als om kwart over drie?

A55



Een jongerenblad start een reclamecampagne om de losse verkoop te verhogen. De campagne zal enkele maanden duren.

De uitgever van het blad hanteert voor het jaar na de start van de reclamecampagne de formule $A = 9 + \frac{5}{(0,05t - 2)^2 + 1}$. Hierin is A

het aantal wekelijks verkochte exemplaren in duizendtallen en t de tijd in weken met $t = 0$ op het moment dat de campagne begint.

- Schets de grafiek van A .
- Hoeveel weken na de start van de campagne is de losse verkoop het grootst? Hoeveel is de verkoop dan?
- Gedurende hoeveel weken is de wekelijkse verkoop meer dan 13 500 exemplaren?

A56
□ ⊗ *

Het aantal bezoekers van een internetsite waarop allerlei goederen te koop worden aangeboden, is voor een doordeweekse dag te benaderen door de formule $N = 0,02t^5 - 1,225t^4 + 22,5t^3 - 84t^2 - 646t + 5000$. Hierin is N het aantal bezoekers en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0:00 uur.

- a Schets de grafiek van N .
- b Hoeveel bezoekers zijn er 's middags om half een?
- c Hoe laat is het aantal bezoekers het grootst? Hoeveel bezoekers zijn er dan?
- d Er zijn 6000 bezoekers. Hoe laat kan het zijn?

A57
*

In een gebied groeien twee verwante plantensoorten A en B. Door een veranderd natuurbeheer van het gebied komen er vanaf 2015 steeds meer exemplaren van soort A en juist steeds minder van soort B. Per hectare worden de aantallen van soort A gegeven door de formule $N_A = 20 \cdot 1,18^t$ en de aantallen van soort B door $N_B = 600 \cdot 0,92^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2015.

- a Schets de grafieken van N_A en N_B voor de jaren 2015-2035 in één figuur.
- b In welk jaar komen er voor het eerst meer dan 20 planten van soort A per ha bij?
- c In welke maand van welk jaar zijn er per ha evenveel planten van soort A als van soort B?
Hoeveel planten van soort A en soort B zijn er dan samen per ha?
- d Het totaal aantal planten van soort A en soort B samen bereikt een minimum.
Bereken dit minimum.
- e In welk jaar zijn er voor het eerst meer dan 200 planten per ha meer van soort A dan van soort B?

O58
□ ⊗ *

Een bungeejumper springt van een plateau. Bij deze sprong is op enkele tijdstippen de afstand van de bungeejumper tot het plateau gemeten. Zie de tabel hiernaast. Hierin is t de tijd in seconden en A de afstand tot het plateau in meter.

- a Teken de punten van de tabel in een assenstelsel en teken door deze punten een vloeiende kromme.

Peter heeft bij de sprong de formule $A = -3,5t^2 + 21t$ opgesteld.

- b Teken de grafiek van deze formule in de figuur van vraag a. Vind je dat deze formule goed past bij de sprong?

Tisca heeft bij de sprong de formule $A = 6t^2 - t^3$ opgesteld.

- c Laat zien dat de punten van de tabel passen bij deze formule.

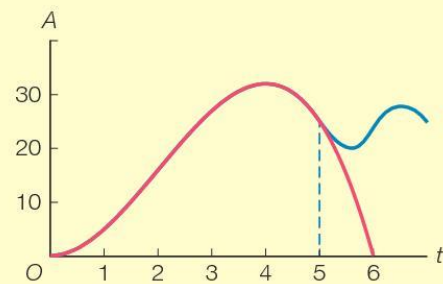
t	0	1	2	3	4	5
A	0	5	16	27	32	25



Theorie B Modelvorming

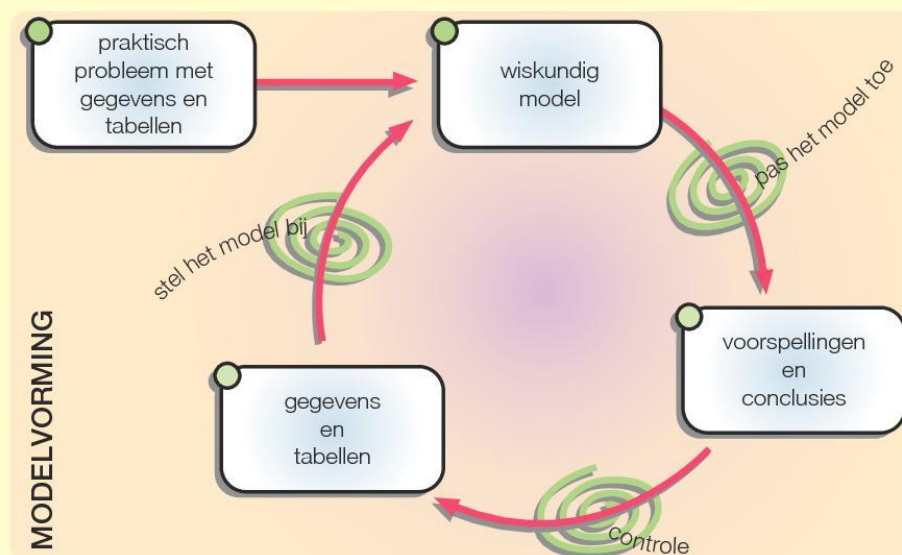
In opgave 58 past de formule $A = 6t^2 - t^3$ goed bij de tabel. Realiseer je echter dat de formule slechts een benadering is van de werkelijkheid. Zo geldt de formule niet voor $t > 5$, want voor bijvoorbeeld $t = 6$ zou dan de afstand van de bungeejumper tot het plateau 0 meter zijn en dat kan natuurlijk niet.

Je werkt met een **wiskundig model**.



figuur 1.18 De rode grafiek hoort bij de formule $A = 6t^2 - t^3$.

Je zou het model kunnen aanpassen zodat ook voor waarden van t groter dan 5 de sprong wordt beschreven. In het schema van **figuur 1.19** is dit proces van **modelvorming** weergegeven. Bij het oplossen van allerlei problemen zul je de elementen uit dit schema tegenkomen.



figuur 1.19 Enkele elementen uit het schema 'modelvorming' zul je bij het oplossen van allerlei problemen tegenkomen.

Voorbeeld

De meeste medicijnen zijn beperkt houdbaar. Meestal loopt de werkzaamheid terug. Bij het medicijn Parmal wordt de werkzaamheid W uitgedrukt in een getal tussen 0 en 100. Bij de aankoop is de werkzaamheid 100 en bij een bewaartemperatuur van 20°C is na 5 dagen de werkzaamheid nog 92.

Neem aan dat er een lineair verband is tussen W en de tijd t in dagen.

a Stel de formule op van W .

Sinds kort is Parmal verbeterd waardoor het langer werkzaam is. Bij het nieuwe Parmal2 gaat men uit van een model van de vorm $W = 100 - b\sqrt{t}$. Ook in dit model is W de werkzaamheid na t dagen bij een bewaartemperatuur van 20°C . Het blijkt dat na 9 dagen de werkzaamheid van Parmal2 is afgenomen tot 76.

b Bereken b .

Uitwerking

$$\begin{array}{l} \mathbf{a} \quad \left. \begin{array}{l} W = at + 100 \\ t = 5 \text{ en } W = 92 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5a + 100 = 92 \\ 5a = -8 \\ a = -1,6 \end{array} \end{array}$$

De formule is $W = -1,6t + 100$.

$$\begin{array}{l} \mathbf{b} \quad t = 9 \text{ en } W = 76 \text{ invullen in } W = 100 - b\sqrt{t} \text{ geeft} \quad \begin{array}{l} 100 - b\sqrt{9} = 76 \\ -3b = -24 \\ b = 8 \end{array} \end{array}$$

59



Zie het voorbeeld met de formules $W = -1,6t + 100$ en $W = 100 - 8\sqrt{t}$.

a Na hoeveel dagen is de werkzaamheid van beide medicijnen even groot? Hoeveel is de werkzaamheid dan?

Er wordt afgeraden het medicijn nog te gebruiken als de werkzaamheid minder is dan 25. We zeggen dat de houdbaarheid dan is verstreken.

b Na hoeveel dagen is de houdbaarheid van Parmal verstreken? En na hoeveel dagen van Parmal2?

Door Parmal2 in de koelkast te bewaren is het medicijn langer houdbaar. Bij bewaren in de koelkast is 9 dagen na de aanschaf de werkzaamheid nog 82.

c Neem aan dat bij bewaren in de koelkast van Parmal2 een model van de vorm $W = 100 - c\sqrt{t}$ hoort. Bereken c .

Het blijkt dat bij bewaren in de koelkast van Parmal2 de werkzaamheid na 32 dagen nog 70 is.

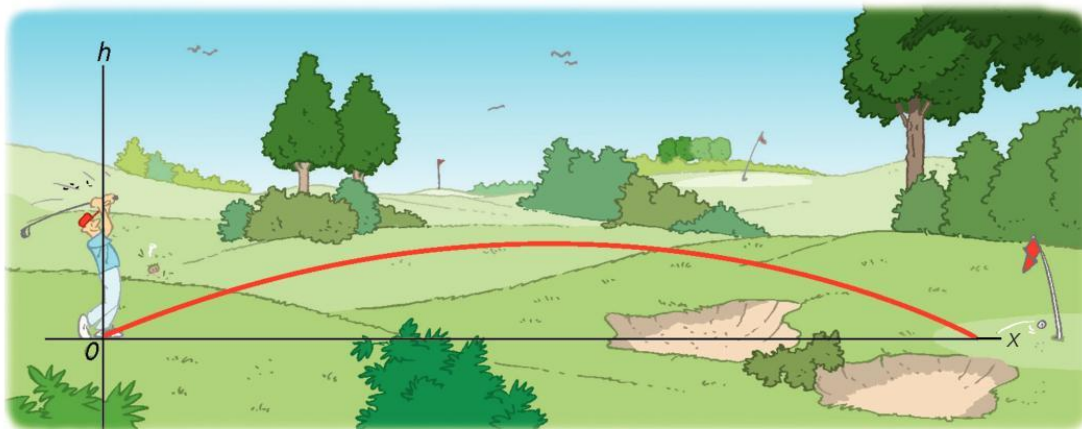
d Laat met een berekening zien dat het model van vraag c hiermee niet in overeenstemming is.

e Ga uit van een model van de vorm $W = 100 - dt^{0,4}$ en gebruik $t = 32$ en $W = 70$ om d te berekenen. Klopt de gevonden formule ook met het gegeven dat $W = 82$ hoort bij $t = 9$?

60
☐ ⊗ *

Bij het bestuderen van de baan van een golfbal heeft men de tabel hiernaast opgesteld. Hierin zijn x en h in meter. Zie ook de figuur hieronder.

x	0	10	25	50	60
h	0	3,5	7,0	7,5	6,0



figuur 1.20

Omdat men aanneemt dat de baan de vorm van een parabool heeft, gaat men uit van het model $h = ax^2 + bx$. Door de gegevens te gebruiken bij $x = 10$ en $x = 60$ kan men berekenen dat $a = -0,005$ en $b = 0,4$.

- Toon aan dat de formule $h = -0,005x^2 + 0,4x$ klopt met de gegevens bij $x = 10$ en $x = 60$.
- Hoe hoog komt de bal maximaal volgens dit model?
- Hoeveel meter vanaf de afslag komt de bal volgens dit model weer op de grond?
- De formule komt met één van de meetwaarden in de tabel niet overeen.

Bij welke waarde van x is dat? Hoeveel cm wijkt de hoogte die de formule geeft af van de gemeten waarde?

61
☐ ⊗

Bij het opstellen van een formule van de hoogte waarop een vuurpijl zich bevindt, gaat men uit van het model $h = at^3 + bt^2$. Hierin is h de hoogte in meter en t de tijd in seconden. De pijl wordt afgeschoten op $t = 0$ en komt op $t = 8$ weer op de grond. Op $t = 5$ is de pijl op een hoogte van 75 meter. Hiermee kan men berekenen dat $a = -1$ en $b = 8$.

- Toon aan dat de formule $h = -t^3 + 8t^2$ klopt met de genoemde gegevens.
- Schets de grafiek bij de formule.
- Na hoeveel seconden is de pijl volgens dit model op het hoogste punt? Op welke hoogte is de pijl dan?
- Bereken voor welke waarden van t de pijl op een hoogte van 50 meter is. Rond af op één decimaal.

62



Een experiment met bacteriën in een laboratorium begint op 1 september om 0:00 uur met 200 miljoen bacteriën. Uit metingen blijkt dat het aantal bacteriën op 1 september met 7 miljoen afneemt en op 6 september toeneemt van 285 miljoen tot 368 miljoen. De laborant neemt op grond van deze metingen aan dat het aantal bacteriën wordt gegeven door een model van de vorm $N = at^3 + bt + 200$. Hierin is N het aantal in miljoenen en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 september om 0:00 uur.

- Toon aan dat $a = 1$ en $b = -8$ een formule oplevert die overeenkomt met alle gegeven meetwaarden.
- Op welke datum neemt volgens deze formule het aantal bacteriën voor het eerst met meer dan 200 miljoen toe?
- Maak een schets van de grafiek bij de formule waaruit blijkt dat er een tijdstip is waarop het aantal bacteriën minimaal is en bereken het minimale aantal bacteriën.

A63



Een thermosfles wordt getest door deze te vullen met kokendheet water. Daarna wordt op verschillende tijdstippen de temperatuur van het water in de fles gemeten. Zie de tabel, waarin T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ is na t minuten.

t	0	9	19	31	46	65
T	100	90	80	70	60	50

- Licht toe dat bij de tabel geen lineair verband hoort.

De onderzoeker gaat uit van een model van de vorm $T = a \cdot b^t + c$.

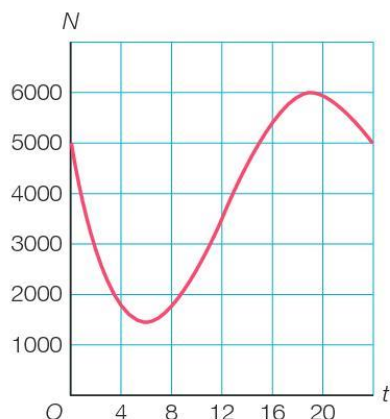
Omdat de omgevingstemperatuur 20°C is, neemt hij $c = 20$.

- Licht toe dat uit $t = 0$ en $T = 100$ volgt dat $a = 80$. Gebruik dat $b^0 = 1$.
- Gebruik de formule $T = 80 \cdot b^t + 20$ en het gegeven dat na 65 minuten de temperatuur 50°C is om b te berekenen. Rond af op drie decimalen.
- Onderzoek of de bij c gevonden formule past bij de andere gegevens van de tabel.
- Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van het water in de thermosfles gedaald is tot 40°C .



A64*****

In de figuur hieronder is het aantal bezoekers van een internetsite op een doordeweekse dag uitgezet tegen de tijd in uren met $t = 0$ om 0:00 uur. Om zes uur 's morgens is het aantal bezoekers met 1450 minimaal en om zeven uur 's avonds is het aantal bezoekers met 6000 maximaal. Verder is om 12 uur het aantal bezoekers 3500. Door daarnaast gebruik te maken van het gegeven dat om 0 uur en om 24 uur het aantal bezoekers 5000 is, is het model $N = -3,35t^3 + 132t^2 - 1240t + 5000$ opgesteld.



figuur 1.21

- a** Onderzoek of deze formule goed past bij de gegevens. Bij welk van de genoemde tijdstippen vind je de grootste afwijking? Hoeveel wijkt in dat geval de formule af van het gegeven?

Een andere wiskundige komt met het model

$N = 0,0577t^4 - 6,17t^3 + 174t^2 - 1430t + 5000$ voor het aantal bezoekers van de site.

- b** Onderzoek op welk van de genoemde tijdstippen dit model een betere benadering geeft van de werkelijkheid dan het eerste model. En op welke tijdstippen geeft dit model een slechtere benadering?

Terugblik

Formules en de GR

Op de GR kun je formules invoeren en vervolgens de grafieken plotten en tabellen laten maken. De GR bezit opties om

- bij een gegeven x de y -waarde te berekenen
- de coördinaten van snijpunten van grafieken te berekenen
- de coördinaten van toppen en snijpunten van een grafiek met de x -as te berekenen
- bij een formule een tabel te maken.

Gebruik je in de uitwerking van een opgave de GR, dan noteer je de formules die je invoert en de opties die je gebruikt. Geef het resultaat en beantwoord de gestelde vraag.

Bij een experiment in een laboratorium wordt het aantal bacteriën in de eerste twee weken van september gegeven door de formule $N = t^3 - 9t^2 + 200$. Hierin is N het aantal bacteriën in miljoenen en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 september om 0:00 uur.

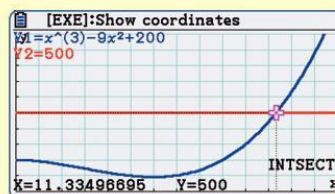
Je berekent als volgt op welke datum het aantal bacteriën is toegenomen tot een half miljard.

Voer in $y_1 = x^3 - 9x^2 + 200$ en $y_2 = 500$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 11,3$.

Op 12 september is het aantal bacteriën tot een half miljard toegenomen.

Een half miljard is 500 miljoen, dus $y_2 = 500$. Twee weken is 14 dagen, dus neem x tussen 0 en 14.



Modelvorming

Een wiskundig model is een formule, een grafiek of een ander wiskundig instrument waarmee je de werkelijkheid benadert. Omdat je met een benadering werkt, moet je voorzichtig zijn met het trekken van conclusies. Om een betere benadering te krijgen kan het noodzakelijk zijn het model te verfijnen of bij te stellen.

Een bedrijf hanteert een model van de vorm $W = -20q^2 + bq - 500$ om de winst W in euro's te berekenen bij een dagverkoop q . Het blijkt dat bij een dagverkoop van 10 stuks de winst 2300 euro is.

Dit geeft $-20 \cdot 10^2 + 10b - 500 = 2300$.

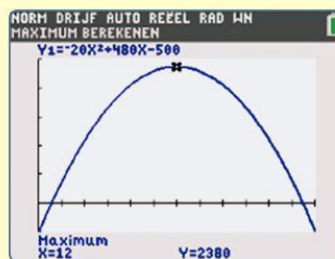
Oplossen van deze vergelijking geeft $b = 480$.

Je kunt met de verkregen formule de maximale winst berekenen. Hierbij hoort de volgende uitwerking.

Voer in $y_1 = -20x^2 + 480x - 500$.

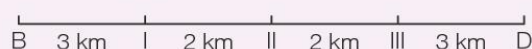
De optie maximum geeft $x = 12$ en $y = 2380$.

De maximale winst is 2380 euro.



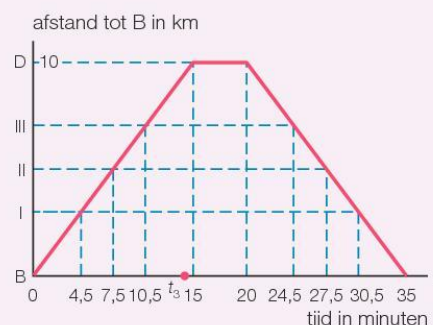
Eindopdracht Shuttlebussen

Tussen het bezoekerscentrum in natuurpark Cradle Mountain en het eindpunt bij Dove Lake rijden shuttlebussen. De weg tussen het bezoekerscentrum en Dove Lake is erg smal en er zijn maar drie punten op de 10 km lange route waar shuttlebussen elkaar kunnen passeren. Zie onderstaande figuur. Hierin is B het bezoekerscentrum, D is Dove Lake en I, II en III zijn de punten waar de bussen elkaar kunnen passeren. Bij de punten I, II en III kan een bus ook een tijdje stilstaan om een andere bus te laten passeren.



De bussen rijden 40 km/uur en bij het bezoekerscentrum en het eindpunt blijven de bussen minimaal 3 minuten staan om de passagiers in en uit te laten stappen. Er zijn in totaal 6 shuttlebussen. Op drukke dagen worden alle bussen ingezet. We bekijken in deze opdracht welk schema deze bussen moeten aanhouden, zodat per uur zoveel mogelijk passagiers worden vervoerd.

In de figuur hiernaast is op de horizontale as de tijd t in minuten uitgezet. Op de verticale as staat de afstand in km met de punten B, I, II, III en D. Getekend is de rit van de eerste bus van de dag. De start is op $t = 0$ en op $t = 15$ is de bus bij Dove Lake. De bus rijdt op $t = 20$ terug en komt op $t = 35$ aan bij het bezoekerscentrum.



- Licht de getallen op de horizontale as toe.

Bus 2 vertrekt 4 minuten na bus 1 vanaf B. Dat is dus op $t = 4$.

- Licht toe dat dit geen problemen oplevert met het passeren van bus 1. Kan bus 3 op $t = 8$ vertrekken en daarna in één keer doorrijden naar Dove Lake? Licht toe.

In de figuur is met t_3 het tijdstip aangegeven waarop bus 3 moet vertrekken, zodat deze in één keer kan doorrijden en bus 1 kan passeren bij punt III.

- Bereken t_3 .
- Wat zijn de tijdstippen t_4 , t_5 en t_6 waarop bussen 4, 5 en 6 moeten vertrekken, zodat deze in één keer kunnen doorrijden zonder problemen op te leveren met bus 1?
- Maak een schema waarbij de 6 bussen worden ingezet. Gebruik dat de bussen ook bij de punten I, II en III kunnen wachten.
- Onderzoek of bij een inzet van minder dan 6 bussen meer passagiers per uur kunnen worden vervoerd dan bij de inzet van 6 bussen.

Diagnostische toets

1.1 Lineaire formules

- 1 Teken in één figuur de lijnen $k: y = -2x + 3$, $l: y = \frac{1}{3}x - 2$, $m: y = -1\frac{1}{2}$ en $n: x = 2\frac{1}{2}$.
- 2 a De lijn k gaat door het punt $A(9, 3)$ en is evenwijdig met de lijn $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$.
Stel de formule op van k .
b Stel de formule op van de lijn m door het punt $B(-1, 6)$ met $rc_m = 0$.
c Bereken de coördinaten van het snijpunt C van de lijn $n: y = 8x + 5$ met de x -as.
- 3 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen $p: y = \frac{1}{6}x + 3$ en $q: y = 2\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$.

1.2 Een lijn door twee gegeven punten

- 4 De lijn k gaat door de punten $A(-5, 2)$ en $B(3, -2)$ en de lijn l gaat door de punten $P(40, 60)$ en $Q(65, 135)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen k en l .
- 5 Het aantal toeschouwers A bij voetbalclub ATC hangt af van de entreprijs p in euro's. Bij een prijs van €7,50 komen er 800 toeschouwers, maar dat aantal zakt tot 665 bij een prijs van €9,75.
a Schrijf A als functie van p . Ga uit van een lineair verband.
b Bereken het aantal toeschouwers bij een prijs van €11,25.
c Bij welke entreprijs komen er meer dan 1000 toeschouwers?

1.3 Interpoleren, extrapoleren en evenredigheid

- 6 Zie de tabel.

INVOER EN UITVOER VAN ELEKTRICITEIT IN NL IN MILJOENEN KWH

jaar	2005	2008	2012	2017
invoer	23 693	24 966	32 155	22 444
uitvoer	5 398	9 116	15 046	18 944

- a Bereken met lineair interpoleren de invoer van elektriciteit in 2011.
b Bereken met lineair interpoleren de uitvoer van elektriciteit in 2006.
c Bereken met lineair extrapoleren het verschil tussen de invoer en uitvoer van elektriciteit in 2020.

- 7** Voor een auto die met een constante snelheid rijdt is het benzineverbruik evenredig met de afgelegde afstand.

In deze opgave gaat het over een auto die met een constante snelheid van 100 km/uur rijdt. Na 45 km blijkt de auto 3,6 liter benzine verbruikt te hebben.

- a** Stel de formule op van het benzineverbruik B in liter bij een afgelegde afstand van d km.
- b** Bereken hoeveel kilometer de auto kan afleggen met 6 liter benzine.

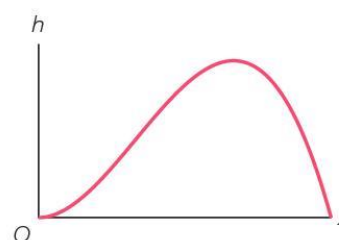
- 8** Het aantal verkochte zonnebrillen van het merk Jaap is omgekeerd evenredig met de prijs. Bij een prijs van 50 euro worden er per jaar 12 000 brillen verkocht.

- a** Stel de formule op van het jaarlijks verkochte aantal zonnebrillen A bij een prijs van p euro.
- b** Hoeveel zonnebrillen worden er per jaar verkocht bij een prijs van 24 euro?
- c** Er zijn 8000 zonnebrillen geproduceerd. Welke prijs kan er maximaal gevraagd worden als men ze allemaal in één jaar wil verkopen?

1.4 Wiskundige modellen

- 9** Jan heeft een drone. Bij een van de vluchten van de drone hoort de formule $h = 0,03x^2 - 0,0003x^3$. Zie de figuur hiernaast. In de formule zijn x en h in meter.

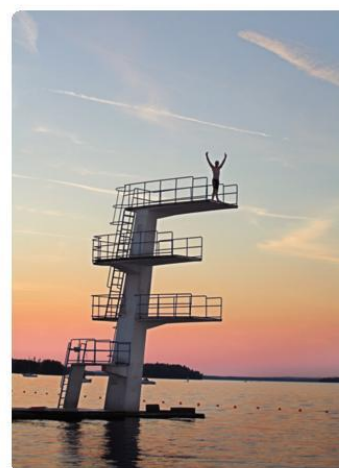
- a** Hoeveel meter verderop komt de drone weer op de grond?
- b** Wat is de maximale hoogte van de drone? Rond af op dm.
- c** Voor welke waarden van x is de hoogte meer dan 40 meter? Rond af op één decimaal.



figuur 1.22

- 10** Collin springt van 10 meter hoogte van een duiktoren in het water. Hij springt rechtop en landt met zijn voeten na 1,85 seconden in het water. Bij het opstellen van een formule voor de hoogte van zijn voeten tijdens de sprong gaat men uit van het model $H = at^2 + bt + c$. Hierin is H de hoogte in meter ten opzichte van het wateroppervlak en t de tijd in seconden na het begin van de sprong.

- a** Toon aan dat de formule $H = -4,43t^2 + 2,78t + 10$ klopt met de genoemde gegevens.
- b** Schets de grafiek bij de formule.
- c** Na hoeveel seconden is hij op het hoogste punt? Hoe hoog is hij dan boven het wateroppervlak? Rond af op gehele cm.



Overzicht routes

1 Formules en grafieken

1.1 Lineaire formules

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

1.2 Een lijn door twee gegeven punten

opgave	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
□ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

1.3 Interpoleren, extrapoleren en evenredigheid

opgave	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
□ basis																			
⊙ midden																			
* uitdagend																			

1.4 Wiskundige modellen

opgave	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													