

4

Combinatoriek

Wat leer je?

- Telproblemen overzichtelijk weergeven.
- Dat je bij telproblemen moet afvragen of herhalingen zijn toegestaan en of de volgorde van belang is.
- De driehoek van Pascal gebruiken.
- Wat permutaties, faculteiten en combinaties zijn.
- Herkennen welke aanpak nodig is voor het oplossen van een telprobleem.



Beginopdracht Kentekens

In sommige landen hebben personenauto's een kenteken dat persoonsgebonden is, of afhangt van de plaats waar iemand vandaan komt. In Nederland hebben personenauto's een kenteken dat bij het voertuig hoort en afhangt van het moment van uitgifte van het kenteken. Daarbij worden cijfers en letters gebruikt in een volgorde die afhangt van de zogenaamde sidecode, de serie waar het kenteken deel van uitmaakt.

Voor personenauto's wordt er gewoonlijk gebruikgemaakt van de 16 letters B, D, F, G, H, J, K, L, N, P, R, S, T, V, X en Z. Verder worden alle cijfers gebruikt, dus ook de 0.

In de praktijk zijn er bepaalde lettercombinaties die men niet wil gebruiken, bijvoorbeeld als deze een afkorting uit de Tweede Wereldoorlog vormen of een politieke partij weergeven. In deze opdracht houden we daar geen rekening mee.

Sidecode 5 werd ongeveer acht jaar gebruikt, van halverwege 1991 tot halverwege 1999. In deze sidecode werd een kenteken gevormd door vier letters gevolgd door twee cijfers, bijvoorbeeld:



In deze sidecode werd van de eerdergenoemde 16 letters de K niet gebruikt. De B en de V werden wel gebruikt, maar niet als eerste letter.

Sidecode 8 werd van maart 2013 tot maart 2015 gebruikt. Hierbij werd een kenteken gevormd door een cijfer, dan drie letters en dan weer twee cijfers, bijvoorbeeld:



In deze sidecode werd de K weer gebruikt, maar als beginletter werden slechts de K, S, T, X en Z gebruikt.

- Bereken op basis van deze gegevens in welke van de twee genoemde periodes er meer kentekens per jaar werden uitgegeven.

Voorkennis De vermenigvuldigingsregel en de somregel

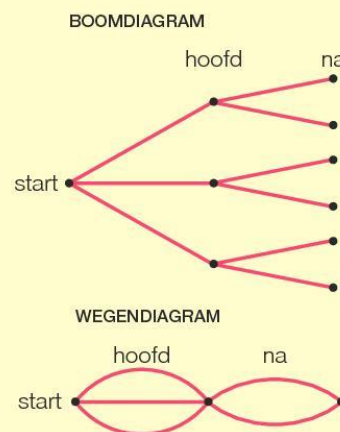
Theorie A Telproblemen

In een bedrijfskantine kun je dagelijks kiezen uit drie hoofdgerechten en twee nagerechten.

Het boomdiagram geeft 6 mogelijkheden aan. De berekening die hierbij hoort is $3 \times 2 = 6$. Ook in het wegendiagram kun je deze berekening herkennen. Een voordeel van een boomdiagram ten opzichte van een wegendiagram is dat alle mogelijkheden apart zijn aangegeven.

Een nadeel van een boomdiagram is dat bij een groot aantal keuzemogelijkheden het tekenen veel werk is. Een wegendiagram kan dan vaak uitkomst bieden.

Als je twee of meer handelingen uitvoert, dan heb je te maken met de vermenigvuldigingsregel. Zijn er voor handeling I vier mogelijkheden, voor handeling II vijf mogelijkheden en voor handeling III twee mogelijkheden, dan zijn er voor de gecombineerde handeling $4 \times 5 \times 2$ mogelijkheden.



figuur 4.1

De vermenigvuldigingsregel

Een gecombineerde handeling die bestaat uit handeling I die op p manieren kan worden uitgevoerd en handeling II die op q manieren kan worden uitgevoerd en handeling III die op r manieren kan worden uitgevoerd kan op $p \times q \times r$ manieren worden uitgevoerd.

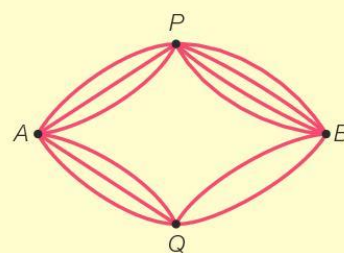
Bij sommige telproblemen heb je niet alleen de vermenigvuldigingsregel nodig, maar ook de somregel. Ga je in figuur 4.2 van A naar B , dan moet je via P of via Q .

Het aantal manieren van A naar B via P is 3×4 .

Het aantal manieren van A naar B via Q is 3×2 .

Het totale aantal manieren van A naar B is $3 \times 4 + 3 \times 2 = 18$.

Dat je moet optellen kun je vaak herkennen aan het woordje 'of'. Je kunt hier namelijk van A naar B via P of via Q .



figuur 4.2

Optellen of vermenigvuldigen?

Kan handeling I op p manieren en handeling II op q manieren, dan kan

- handeling I EN handeling II op $p \times q$ manieren
- handeling I OF handeling II op $p + q$ manieren.

Bij 'of' hoort optellen. Soms kun je het woordje 'of' er eerst bij denken, zoals bij vraag b in het voorbeeld hieronder.

Voorbeeld

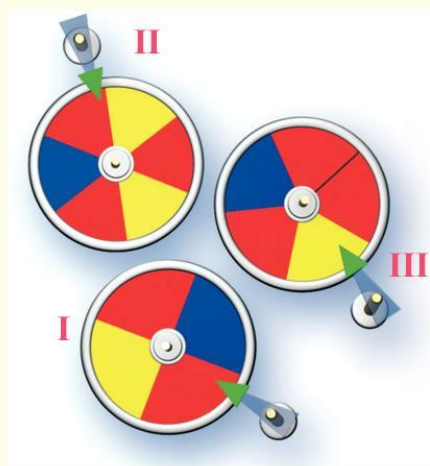
Robert laat de schijven hiernaast elk één keer draaien.

Hoeveel uitkomsten zijn er met

- a drie keer rood
- b drie gelijke kleuren
- c twee keer geel en één keer blauw?

Uitwerking

- a rrr
aantal = $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$
- b rrr of bbb of ggg
aantal = $2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 21$
- c ggb of gbg of bgg
aantal = $1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 5$



figuur 4.3

- 1 Muriël laat de schijven hiernaast elk één keer draaien.

Hoeveel uitkomsten zijn er

- a met drie keer een A
- b met drie keer dezelfde letter
- c met twee keer een A en één keer een C
- d zonder B
- e met drie dezelfde kleuren
- f met twee keer groen en één keer rood?



figuur 4.4

- 2 Op een boekenplank staan 11 Engelse, 8 Duitse en 5 Franse boeken.

- a Loubna leest van deze boeken eerst een Engels, dan een Duits en ten slotte een Frans boek.
Hoeveel mogelijke drietallen zijn er?
- b Hoeveel mogelijke tweetallen zijn er voor Loubna als ze twee boeken leest: eerst een Engels boek en daarna een Frans of een Duits boek?

4.1 Regels voor telproblemen

01 Bente gooit met een rode en een blauwe dobbelsteen.

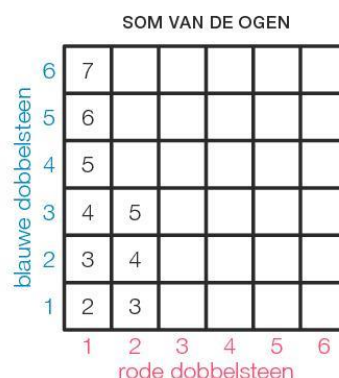


In het rooster hiernaast staat een begin van een overzicht van de mogelijke resultaten.

- a** Vul het overzicht verder in.
- b** Hoeveel mogelijkheden zijn er om minstens 9 ogen te gooien?

Je kunt het aantal mogelijkheden om minstens 9 ogen te gooien ook vinden door de mogelijkheden systematisch te noteren.

- c** Doe dat.



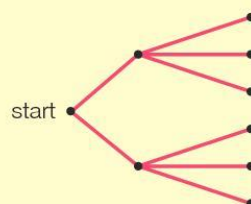
figuur 4.5 In het rooster zijn 36 mogelijke uitkomsten te onderscheiden.

Theorie A Telproblemen overzichtelijk weergeven

In opgave 1 heb je gezien dat je een telprobleem ook kunt oplossen door een **rooster** te gebruiken en door **systematisch noteren**.

Telproblemen visualiseren

- ## 1 Boomdiagram

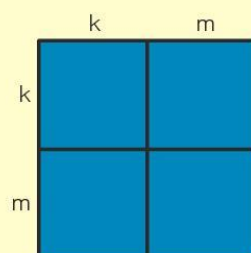


- ## 2 Wegendiagramm



- ### 3 Rooster

Het aantal mogelijkheden bij het gooien met twee geldstukken is uit het rooster af te lezen. Dit aantal is 4.



- #### 4 Systematisch noteren

Er zijn 6 manieren om bij een worp met drie dobbelstenen in totaal 5 ogen te gooien.

113	131	311
221	212	122

Voorbeeld

Zes voetbalteams spelen een hele competitie.
In een hele competitie speelt elk team één keer thuis
en één keer uit tegen elk ander team.
Hoeveel wedstrijden zijn er in totaal?

Aanpak

Maak een rooster waarin je de wedstrijden aangeeft.
Je krijgt zes rijen met elk vijf wedstrijden.

Uitwerking

Er zijn $6 \cdot 5 = 30$ wedstrijden.

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

2



a N is het aantal wedstrijden in een hele competitie met n teams.

Stel de formule op van N .

b Wat wordt bedoeld met een halve competitie?

3



De basketbalteams van de klassen 4v1, 4v2, 4h1, 4h2 en 4h3 spelen een halve competitie.

a Welke vorm van visualisatie gebruik je het liefst om een overzicht van alle wedstrijden te krijgen?

b Hoeveel wedstrijden zijn er in totaal in een halve competitie met vijf teams?

c Verander de formule van opgave 2a zo, dat N het aantal wedstrijden geeft van een halve competitie met n teams.

4

*

a Hoeveel wedstrijden worden gespeeld in een halve competitie met n teams?

b In een halve competitie worden in totaal 45 wedstrijden gespeeld. Onderzoek hoeveel teams aan deze halve competitie deelnemen.

5



Aan een voetbalkampioenschap doen 40 teams mee. De teams worden ingedeeld in acht groepen van vijf teams die een hele competitie spelen. De groepswinnaars spelen daarna volgens het afvalsysteem met uit- en thuiswedstrijden om het kampioenschap.

a Hoeveel wedstrijden worden in totaal gespeeld?

b Hoeveel wedstrijden heeft de kampioen gespeeld?

6



Jona gaat een hardloopschema maken. Hij wil iedere week drie dagen hardlopen, telkens op dezelfde dagen. Hij wil nooit twee dagen achter elkaar hardlopen. Hoeveel verschillende schema's kan Jona maken?



- 7** Een gewone dobbelsteen wordt ook wel een zesvlaksdobbelsteen genoemd. Jai gooit met een viervlaksdobbelsteen en een achthvlaksdobbelsteen. Zie de groene en de blauwe dobbelsteen in figuur 4.6. Hoeveel mogelijkheden zijn er
- om in totaal 8 ogen te gooien
 - om minder dan 8 ogen te gooien
 - waarbij het product van de ogen 8 is?



figuur 4.6

- 8** Een bedrijf laat een nieuwe website maken. De achtergrond van de website moet bestaan uit drie gekleurde, horizontale banen. Voor de kleur van de banen moet gekozen worden uit rood, geel en blauw. Twee aan elkaar grenzende banen mogen niet dezelfde kleur hebben. Hoeveel achtergronden zijn er voor de website mogelijk?

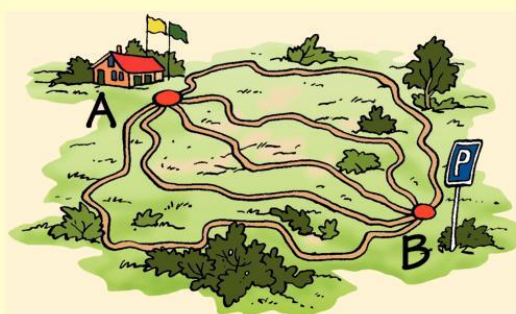
- A9** Hoeveel mogelijkheden zijn er om met drie gewone dobbelstenen in totaal
- 17 ogen te gooien
 - 16 ogen te gooien
 - minstens 16 ogen te gooien
 - 6 ogen te gooien?

- A10** In deze opgave kijken we naar positieve gehele getallen van drie cijfers waarvan het middelste cijfer het gemiddelde is van de andere twee. Een voorbeeld van zo'n getal is 741. Hoeveel van die getallen zijn er?

- 011** De firma Nelovo voorziet zijn artikelen van een code bestaande uit twee letters. Gekozen wordt uit de letters A, B, C en D. Hoeveel codes zijn mogelijk? Onderscheid de volgende situaties.
- De tweede letter is een andere dan de eerste letter.
 - De letters mogen gelijk zijn.

Theorie B Met en zonder herhaling

Het aantal rondwandelingen van A via B terug naar A in figuur 4.7 is $5 \times 5 = 25$. Je gaat er dan vanuit dat je terug dezelfde weg mag kiezen als heen. Wil je terug niet dezelfde weg nemen als heen, dan is het aantal $5 \times 4 = 20$. Het is bij telproblemen belangrijk je af te vragen of **herhalingen** zijn toegestaan.



figuur 4.7

Zonder herhaling

Een bestuur van acht personen kiest uit zijn midden eerst de voorzitter, dan de secretaris en ten slotte de penningmeester.

Het aantal manieren om deze functies te verdelen bereken je als volgt.

$$\text{aantal} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Diagram illustrating the calculation of the number of ways to choose three different people for three different positions (first president, then secretary, then treasurer) without repetition. The first position has 8 choices, the second has 7, and the third has 6.

eerst de voorzitter:
keuze uit 8 personen

dan de secretaris:
keuze uit 7 personen

ten slotte de penningmeester:
keuze uit 6 personen

Met herhaling

In een volleybalteam met acht spelers wordt in de maanden maart, april en mei een speler van de maand gekozen. Dit mag steeds dezelfde speler zijn.

Het aantal manieren om de spelers van de maand te kiezen bereken je als volgt.

$$\text{aantal} = 8 \times 8 \times 8 = 512$$

Diagram illustrating the calculation of the number of ways to choose a player of the month for three consecutive months (March, April, May) with repetition allowed. Each month has 8 choices.

8 spelers voor de eerste maand

8 spelers voor de tweede maand

8 spelers voor de derde maand

Voorbeeld

Een bedrijf codeert zijn artikelen met getallen van vijf cijfers.

Alleen de cijfers 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8 worden gebruikt.

Hoeveel van die getallen zijn er in het geval

- a elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
- b elk cijfer vaker gebruikt mag worden en het getal groter dan 50 000 moet zijn
- c elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 65 000 moet zijn?

Aanpak

- c Is het eerste cijfer 5 of lager, dan maken de volgende cijfers niets uit.
Is het eerste cijfer 6, dan moet het tweede cijfer lager dan 5 zijn.

Uitwerking

- a $\text{aantal} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ Voor de eerste plaats 7 mogelijkheden, dan nog 6 voor de tweede plaats, ...
- b Het eerste cijfer is 5, 6, 7 of 8.
 $\text{aantal} = 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 9604$ Herhalingen zijn toegestaan.
- c Het eerste cijfer is 2, 3, 4 of 5 OF
het eerste cijfer is 6 en het tweede is 2, 3 of 4.
 $\text{aantal} = 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1620$

- 12** In deze opgave gaat het om getallen van vier cijfers, waarin alleen maar de cijfers 3, 4, 5, 6, 7 en 8 voorkomen.



Hoeveel van die getallen zijn er in het geval

- a** elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
- b** elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 6000 moet zijn
- c** elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal groter moet zijn dan 6500?

- 13** Bij een uitwisseling maakt een groep van acht Nederlandse en tien Franse leerlingen een wandeling door Lille. Eén leerling maakt foto's, één leerling maakt een verslag en één leerling bepaalt de route. Op hoeveel manieren zijn drie leerlingen aan te wijzen als



- a** een Franse leerling de route bepaalt en het verder niet uitmaakt
- b** een Franse leerling de route bepaalt en Nederlandse leerlingen de foto's en het verslag maken
- c** de foto's en het verslag niet allebei door Franse leerlingen en niet allebei door Nederlandse leerlingen worden gemaakt?



- 14** De IATA (International Air Transport Association) gebruikt een drieletter-code om een vliegveld aan te geven. Zo hoort AMS bij Schiphol en PAP bij Port-au-Prince (Haïti).



- a** Hoeveel van die codes zijn in totaal mogelijk?
- b** Hoeveel codes zijn mogelijk waarbij geen twee gelijke letters naast elkaar staan?
- c** Hoeveel codes zijn mogelijk die met een L beginnen?

- A15** In een bedrijf krijgt elk artikel een code. Bij het coderen gebruikt men de letters *o*, *p*, *q*, *r*, *s* en *t*.



- a** Hoeveel codes van drie letters zijn mogelijk als
 - elke letter maar één keer gebruikt mag worden
 - elke letter vaker gebruikt mag worden?
- b** Het bedrijf gebruikt codes van één, twee, drie, vier, vijf of zes letters. Hoeveel codes zijn er in totaal als
 - in een code geen gelijke letters mogen voorkomen
 - in een code letters vaker mogen voorkomen?

- R16** Een bedrijf voorziet zijn artikelen van een lettercode.
Bij het coderen gebruikt men de letters a, b, c, d en e .
Bedenk een vraag waarop het antwoord luidt
- a** er zijn 5^4 codes mogelijk
 - b** er zijn $5 \cdot 4 \cdot 3$ codes mogelijk
 - c** er zijn $5 \cdot 4 \cdot 5^3$ codes mogelijk
 - d** er zijn $5 \cdot 4 \cdot 4$ codes mogelijk.

- A17** In de tabel staat informatie over de leerlingen van een vierde klas. Uit deze groep worden twee leerlingen gekozen voor de leerlingenraad. De als eerste gekozen leerling vertegenwoordigt de klas en de als tweede gekozen leerling is reserve.
Hoeveel tweetallen zijn mogelijk als
- a** de eerste leerling een jongen is en de tweede leerling een meisje van 17 jaar
 - b** één van de twee 16 jaar moet zijn
 - c** er een jongen en een meisje bij zijn
 - d** de leerlingen even oud zijn
 - e** de eerste leerling ouder moet zijn dan de tweede?

	jongen	meisje	
15 jaar	8	11	19
16 jaar	4	1	5
17 jaar	2	5	7
	14	17	31

- A18** Rosalin schrijft getallen van tien cijfers op die alleen bestaan uit de cijfers 1, 2 en 3. Ook wil zij dat cijfers die naast elkaar staan precies 1 verschillen.
Hoeveel getallen kan Rosalin maximaal opschrijven?

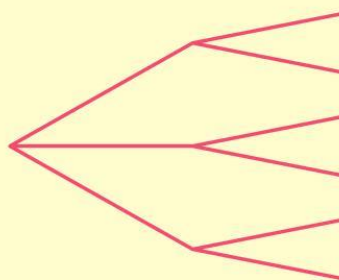
Terugblik

Telproblemen visualiseren

Er zijn meerdere manieren om telproblemen te visualiseren.
Zie hieronder.

Boomdiagram

Je ziet dat er 6 mogelijkheden zijn.



Wegendiagram

Je ziet dat er $3 \times 5 \times 3 = 45$ mogelijkheden zijn.



Rooster

Bijvoorbeeld handig bij het gooien met twee dobbelstenen.

Je ziet hiernaast dat bij het gooien met een gewone dobbelsteen en een viervlaksdobbelsteen er 4 mogelijkheden zijn met som 5.

4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

Systematisch noteren

Bijvoorbeeld handig bij het gooien met drie of meer dobbelstenen.

Je ziet dat je op 10 manieren hoogstens 5 ogen kunt gooien bij een worp met drie dobbelstenen.

hoogstens 5 ogen met
drie dobbelstenen

111	112	113	122
	121	131	212
	211	311	221

Wel of geen herhalingen?

Let bij telproblemen op of herhalingen zijn toegestaan.

Maak je getallen van vier cijfers waarbij je de cijfers 4, 5, 6, 7, 8 en 9 mag gebruiken, dan krijg je

- met herhaling $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ mogelijkheden
- zonder herhaling $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ mogelijkheden.

4.2 Permutaties en combinaties

019
□ ⊗ *

Een groep van tien vrienden heeft een vriendenweekend. Eén van hen reserveert de verblijfplaats, één regelt het vervoer en een derde doet de inkopen.

- a Op hoeveel manieren kunnen deze drie taken verdeeld worden?
- b Op hoeveel manieren kunnen tien verschillende taken over deze tien vrienden verdeeld worden?

Theorie A Permutaties en faculteiten

Aan een volleybaltoernooi doen acht teams mee. We noemen ze A, B, C, D, E, F, G en H. We vragen ons af op hoeveel manieren de gouden, de zilveren en de bronzen medaille bij deze teams terecht kunnen komen. Het antwoord volgt uit de vermenigvuldigingsregel. Dat aantal is $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. Eén van de rangschikkingen is BEA. Een ander woord voor rangschikking is **permutatie**. Dus het aantal permutaties van 3 uit 8 is $8 \cdot 7 \cdot 6$. Bij een permutatie kunnen geen herhalingen optreden.

Bij veel telproblemen in de vorige paragraaf ging het om het berekenen van aantallen permutaties.

Het aantal permutaties van 4 uit 10, oftewel het aantal rangschikkingen van vier dingen die je uit tien dingen kiest, is $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

Het aantal permutaties van 6 uit 8 is $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ en het aantal permutaties van 8 uit 8 is $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

De notatie voor dit laatste product is $8!$.

Spreek uit: 8 **faculteit**. Dus het aantal permutaties van acht dingen is $8!$.

Het aantal permutaties van n dingen, dus het aantal rangschikkingen van n dingen, is $n!$.
 $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

De GR heeft opties waarmee je faculteiten en het aantal permutaties kunt berekenen.

- Op de TI krijg je ! en nPr in het math-KANS-menu of via de functietoets f2.
 - Op de Casio krijg je ! en nPr in het OPTN-PROB-menu.
 - Op de HP krijg je Factorieel en Permutatie in het werksetmenu
- (Mem B) Wisk. Kies vervolgens Kans.



Permutatie komt van het Latijnse woord *permutare*, dat verwisselen of omwisselen betekent.

De Franse wiskundige Christian Kramp gebruikte omstreeks 1800 voor het eerst de notatie $n!$ voor $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Voorbeeld

Een reclameblok bestaat uit 9 items: 2 over zakelijke producten, 3 over huishoudelijke artikelen en 4 over voedingsmiddelen.

- a Op hoeveel manieren kunnen deze items worden gerangschikt?
- b Op hoeveel manieren kunnen deze items worden gerangschikt als de drie items over huishoudelijke artikelen direct na elkaar komen?

Aanpak

- a Je hebt met een permutatie van 9 uit 9 te maken, dus gebruik een faculteit.
- b Vat de 3 items over huishoudelijke artikelen *eerst* als één item op. Er zijn dan 7 items. Bedenk dat je vervolgens de 3 items over huishoudelijke artikelen ook nog onderling kunt rangschikken.

Uitwerking

- a aantal = $9! = 362\,880$
- b aantal = $7! \cdot 3! = 30\,240$

20



- a Van de favoriete artiest van Otje staan twaalf nummers op een streamingdienst. Ze stelt een top vijf samen. Op hoeveel manieren kan dat?
- b In een kamer staan acht stoelen op een rij. Vijf personen komen de kamer binnen. Elke persoon neemt plaats op een stoel. Op hoeveel manieren kan dat?
- c Een fotograaf heeft 14 foto's gemaakt van het zeehondencentrum in Pieterburen. In een brochure van tien pagina's wordt op elke pagina één foto afgedrukt. Op hoeveel manieren kunnen de foto's geplaatst worden?



21



- Jesse is de pincode van zijn bankpas vergeten, maar hij weet nog wel dat daarin de cijfers 2, 5, 8 en 9 voorkomen.
- a Hoeveel pincodes zijn er met deze cijfers?
 - b Hoeveel van deze pincodes beginnen met 5?

22



- Sasha heeft vijf verschillende wiskundeboeken en drie verschillende scheikundeboeken. Ze zet ze naast elkaar op een lege boekenplank.
- a Op hoeveel manieren kan ze de acht boeken rangschikken?
 - b Op hoeveel manieren kan ze de boeken rangschikken als de wiskundeboeken naast elkaar moeten staan?
 - c Op hoeveel manieren kan ze de boeken rangschikken als zowel de wiskunde- als de scheikundeboeken naast elkaar moeten staan?

23

Een saxofoonkwartet bereidt een concert voor dat zal bestaan uit vier klassieke stukken, drie jazznummers en twee popnummers.

Op hoeveel manieren kunnen zij deze werken ten gehore brengen als zij

- a met een klassiek stuk beginnen en met een jazznummer eindigen
- b de jazznummers direct achterelkaar willen spelen
- c steeds een klassiek stuk willen afwisselen met een ander nummer
- d de stukken van elk genre direct achterelkaar willen spelen?

**A24**

De selectie van het eerste team van korfbalvereniging Avanti bestaat uit zes heren en zes dames.

De trainer wijst een aanvoerder en een reserve-aanvoerder aan.

- a Op hoeveel manieren kan dit?

Aan het begin van de competitie wordt een foto van de selectie gemaakt.

De fotograaf zet de twaalf spelers op een rij.

- b Hoeveel rijen zijn mogelijk?
- c Hoeveel rijen zijn mogelijk waarbij de heren naast elkaar staan?

E25

Er moet een trein gemaakt worden door achter een locomotief vijf wagons (A, B, C, D en E) te plaatsen. Wagon A moet dicht bij de locomotief komen dan wagon B.

Op hoeveel manieren kan deze trein gemaakt worden?

R26

Een bedrijf gebruikt codes met de letters a, b, c, d, e en f. Bedenk een vraag waarbij er

- a $6!$ codes zijn
- b $6 \cdot 5 \cdot 4$ codes zijn
- c 6^4 codes zijn
- d $2 \cdot 4^3$ codes zijn
- e $5! \cdot 2!$ codes zijn
- f $2 \cdot 4! \cdot 2!$ codes zijn.

O27

- a Hoeveel permutaties van 2 uit 4 zijn er?

Een klas kiest een afvaardiging van twee leerlingen voor het schoolparlement. Vier leerlingen van de klas tonen belangstelling, namelijk Anne, Bas, Chris en Daphne.

De permutaties Anne - Daphne en Daphne - Anne leggen dezelfde afvaardiging vast.

- b Hoeveel afvaardigingen kan de klas leveren?

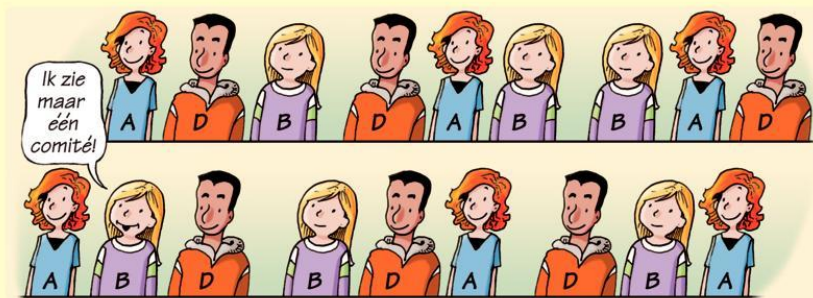
Theorie B Combinaties

Voor het organiseren van een feest bieden zich vijf leerlingen A, B, C, D en E aan. De leraar wijst uit deze vijf leerlingen er drie aan die het organisatiecomité gaan vormen. Hoeveel comités zijn er samen te stellen?

Een eerste gedachte zou de volgende kunnen zijn. Voor het eerste lid heb je vijf mogelijkheden, voor het tweede lid vier en voor het derde lid zijn er nog drie mogelijkheden. Toch is het antwoord $5 \cdot 4 \cdot 3$ niet juist.

Je moet er namelijk rekening mee houden, dat het comité ABD hetzelfde is als de comités ADB, BDA, BAD, DAB en DBA. De volgorde waarin de leerlingen gekozen zijn, doet er bij een comité immers niet toe. Deze $3! = 6$ gelijke comités tellen maar voor één. Steeds zijn er $3!$ gelijke comités, dus je moet $5 \cdot 4 \cdot 3$ door $3!$ delen.

Het aantal comités is $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$.



figuur 4.8

Is bij het kiezen van 3 dingen uit 5 dingen de volgorde niet van belang, dan spreken we van het aantal **combinaties** van 3 uit 5.

Bij het aantal comités van 3 uit 5 gaat het om combinaties en niet om permutaties.

Het aantal combinaties van 3 uit 5 wordt genoteerd als $\binom{5}{3}$.

Spreek uit: vijf boven drie.

Het aantal combinaties van k uit n , oftewel het aantal manieren om k dingen te kiezen uit n dingen zonder op de volgorde te letten, is $\binom{n}{k}$.

Op de GR vind je de optie voor combinaties in hetzelfde menu als de optie voor permutaties.

Op de TI en Casio worden combinaties weergegeven met nCr.

Ga na dat $\binom{5}{3} = 10$.

Voorbeeld

Van de 63 leerlingen van 4 vwo worden er acht uitgekozen om een enquête over de toetsweek in te vullen.

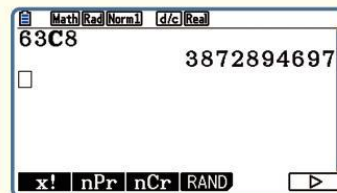
Hoeveel achttallen zijn mogelijk?

Aanpak

De volgorde is niet van belang, dus het gaat om combinaties.

Uitwerking

$$\text{aantal} = \binom{63}{8} = 3\,872\,894\,697$$



R28

Gaat het bij de volgende situaties om combinaties of om permutaties?

- a Uit een klas worden zes leerlingen gekozen om boodschappen te doen voor het schoolfeest.
- b Bij een verloting zijn drie prijzen te winnen: een fiets, een grafische rekenmachine en een taart.
- c In een klas worden vijf bioscoopbonnen verloot.
- d Een vereniging kiest uit haar leden een voorzitter, een secretaris en een penningmeester.
- e Uit de top tien van vorige week stel je een eigen top drie samen.
- f Van alle docenten van een school komen vijf docenten op een schoolfeest.



R29

In een klas met 25 leerlingen worden vijf kaartjes verloot voor een concert.

- a Op hoeveel manieren kan dat?

Liv berekent het antwoord van vraag a met $\binom{25}{20}$ want zij denkt dat je net zo goed kunt berekenen welke 20 leerlingen geen kaartje krijgen.

- b Onderzoek of dit klopt.

- c Onderzoek met enkele getallenvoorbeelden of geldt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.



30

- a Uit een selectie van 18 personen wordt een spelersraad van vier spelers samengesteld.
Hoeveel spelersraden zijn mogelijk?
- b Bij de lotto kruist een deelnemer zes getallen aan uit de nummers 1 tot en met 45.
Hoeveel zestallen zijn mogelijk?
- c Een toets bestaat uit 20 ja/nee-vragen.
Hoeveel mogelijkheden zijn er om 15 juiste antwoorden aan te kruisen?

31


Jan gaat op vakantie. Hij heeft 15 paar schoenen, waarvan hij er vier mee wil nemen op vakantie.

- Hoeveel keuzemogelijkheden heeft Jan?
- Jan heeft twee paar winterschoenen, die hij niet geschikt vindt om mee te nemen. Bovendien wil hij zijn hardloopschoenen zeker meenemen. Met hoeveel neemt het aantal keuzemogelijkheden daardoor af ten opzichte van het aantal bij vraag a?



32


Op het Simon Stevin Lyceum heeft de sciencevleugel 12 lokalen die allemaal naast elkaar liggen.

- Drie lokalen krijgen een nieuw type bord. Op hoeveel manieren kunnen deze lokalen gekozen worden?
- Op hoeveel manieren kunnen 12 klassen over deze lokalen worden verdeeld?
- Op hoeveel manieren kunnen zes docenten over deze lokalen worden verdeeld?
- Tijdens een vijfde uur zijn er 4 natuurkundelessen, 3 scheikundelessen en 5 biologielessen. Hoeveel verdelingen van deze lessen over de lokalen zijn mogelijk als de docenten met hetzelfde vak naast elkaar willen zitten?

GESCHIEDENIS

Simon Stevin

Simon Stevin werd in 1548 geboren in Brugge. Hij was wiskundige, natuurkundige en ingenieur. Op latere leeftijd verhuisde hij naar Den Haag en schreef hij zich in bij de universiteit van Leiden.

In zijn werk *De Thiende* introduceerde Simon Stevin decimale breuken, die het rekenen met breuken behoorlijk vereenvoudigden. Daarnaast had hij ook verdiensten in de natuurkunde, sterrenkunde en techniek. Hij probeerde daarbij theorie en experiment aan elkaar te koppelen. Ook had hij een grote voorliefde voor de Nederlandse taal. Hij vond deze zo mooi, dat hij allerlei Nederlandse woorden verzoon in plaats van de gebruikelijke Latijnse termen. Eén daarvan is het woord wiskunde (wisconst) als alternatief voor mathematica. Andere woorden die afkomstig zijn van Simon Stevin zijn bijvoorbeeld loodrecht in plaats van perpendiculair en raaklijn in plaats van tangens.



Simon Stevin

33



Bij de finale van de Welsh Open, een snookerwedstrijd, gaat het om 'best of 17'. Dat wil zeggen dat wie het eerst 9 frames heeft gewonnen de finale wint. Hawkins en Higgins spelen de finale van de Welsh Open. Hoeveel mogelijkheden zijn er

- a voor Higgins om in 14 frames te winnen
- b waarbij de finale 17 frames duurt
- c voor Hawkins om in hoogstens 13 frames te winnen?

A34



Uit een klas van 28 leerlingen wordt een basketbalteam van acht spelers samengesteld.

- a Hoeveel teams zijn mogelijk?
- b Op hoeveel manieren kunnen de acht spelers op een rij gaan staan?
- c Bij basketbal staan per team vijf spelers in het veld.
Op hoeveel manieren kunnen de vijf startende spelers gekozen worden uit de acht?
- d Bij basketbal zijn er vijf posities in het veld, zoals center en point-guard.
Op hoeveel manieren kunnen deze gevuld worden met de acht spelers?



R35



- a Hoeveel is $\binom{17}{0}$, $\binom{17}{1}$, $\binom{17}{16}$ en $\binom{17}{17}$?
- b Beredeneer hoe je zonder de GR aan de antwoorden van vraag a kunt komen.
- c Geef $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ en $\binom{n}{n}$.

O36



Isa moet voor haar examendossier vijf Engelse en vier Duitse boeken lezen. De Engelse boeken kiest ze uit een lijst van 60 boeken en de Duitse uit een lijst van 40 boeken.

- Op hoeveel manieren kan Isa
- a de vijf Engelse boeken kiezen
 - b de vier Duitse boeken kiezen
 - c de vijf Engelse én de vier Duitse boeken kiezen?

Theorie C Aantallen combinaties vermenigvuldigen en optellen

In het voorbeeld op de volgende bladzijde gebruik je de vermenigvuldigingsregel en de somregel, dit keer in een situatie waarin je met combinaties te maken hebt.

Voorbeeld

Op een school bestaat de feestcommissie uit zes jongens en negen meisjes.

Na elk feest maken zes leden van de feestcommissie de zaal schoon.

Hoeveel schoonmaakploegen zijn mogelijk met

- a twee jongens
- b minstens vijf meisjes?

Aanpak

- a De volgorde is niet van belang, dus het gaat om combinaties.
In een schoonmaakploeg met twee jongens zitten ook vier meisjes.
Kies dus twee van de zes jongens EN vier van de negen meisjes.
Gebruik de vermenigvuldigingsregel.
- b Minstens vijf meisjes wil zeggen: vijf meisjes en één jongen OF zes meisjes. Gebruik de somregel.

Uitwerking

a aantal = $\binom{6}{2} \cdot \binom{9}{4} = 1890$

b aantal = $\binom{9}{5} \cdot \binom{6}{1} + \binom{9}{6} = 840$

NORM DRIJF AUTO REËL RAD WN	
${}^6C_2 \cdot {}^9C_4$	1890
${}^9C_5 \cdot {}^6C_1 + {}^9C_6$	840

37 Zie het voorbeeld.



Hoeveel schoonmaakploegen zijn er met

- a drie jongens
- b alleen maar jongens
- c hoogstens één meisje
- d meer dan vier jongens?

38



Levi heeft twaalf vrienden. Met vijf van deze vrienden gaat hij naar de bioscoop.

- a Hoeveel vijftallen zijn mogelijk?
- b Van de vrienden van Levi zijn de broers Quincy en Jasper onafscheidelijk. Daarom zal Levi nooit uitsluitend één van de broers uitnodigen.
Hoeveel vijftallen zijn nu mogelijk?
- c Van zijn vrienden hebben Thiago en Don ruzie.
Op hoeveel manieren kan Levi vijf vrienden kiezen als hij Thiago en Don niet samen wil uitnodigen?

39



Bij poker wordt een spel met 52 kaarten gebruikt.

Er zijn vier soorten kaarten: klaveren, schoppen, harten en ruiten. Van elke soort zijn er 13 kaarten, namelijk 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A.

Bij poker draait het om een set van vijf kaarten.

Een voorbeeld daarvan is full house, dat is een drietal van dezelfde getallen of letters en ook nog een tweetal.

Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er voor full house?



40

*

Een groep van zeven studenten gaat samen koken en eten. Hiervoor moeten boodschappen gedaan worden. Omdat het een heel gesleep is, zijn hier minstens twee mensen voor nodig, maar er kunnen er voor de gezelligheid ook meer meegaan. Het stelletje Ivo en Sandra wil in ieder geval bij elkaar blijven: zij gaan dus beiden wel of beiden niet mee. Op hoeveel manieren kan de groep die boodschappen gaat doen samengesteld worden?

A41

□ ⊙ *

Restaurant Tapas serveert allerlei kleine gerechten om te delen. Hieronder zie je welke gerechten dat zijn.

vlees	vis	vegetarisch
serranoham	ansjovis	geitenkaas met honing
kippenpootjes	knoflookgarnalen	gegrilde groene asperges
ossenhaaspuntjes	calamares	champignons in knoflook
albondigas	wraps met zalm	spinazie-kaaskroketjes
spareribs	zeebaarsfilet	aardappeltortilla
chorizo	garnalenkroketjes	roergebakken groente
		patatas bravas
		brood met aioli
		gemengde salade

Er zijn dus zes vleesgerechten om uit te kiezen, zes visgerechten en negen vegetarische gerechten.

- Op hoeveel manieren kun je acht verschillende gerechten kiezen?
- Kim en Nikkie willen zeven verschillende gerechten bestellen, waarbij in ieder geval patatas bravas en garnalenkroketjes. Op hoeveel manieren kan dat?
- Peter en Sarah eten geen vlees, maar soms wel vis. Ze willen minstens zes vegetarische gerechten. Hoeveel manieren zijn er voor hen om in totaal acht verschillende gerechten te kiezen?
- Kees en Matthijs houden erg van vlees en gaan twee vleesgerechten dubbel kiezen. Daarnaast kiezen ze nog vier verschillende vegetarische gerechten en twee verschillende visgerechten. Op hoeveel manieren kan dat?

Het restaurant heeft vier keuzes voor een dessert.

- Op hoeveel manieren kun je een menu samenstellen van vier verschillende gerechten en daarna al dan niet een dessert?



Terugblik

Permutaties

Een permutatie van vijf dingen is een rangschikking van deze vijf dingen.

Dus *abcde*, *acedb*, *bacde* en *daceb* zijn verschillende permutaties van de letters *a*, *b*, *c*, *d* en *e*.

Het totale aantal permutaties van vijf dingen is $5!$. Spreek uit: 5 faculteit.
 $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Het aantal permutaties van vijf dingen uit elf dingen is
 $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55\,440$.

Je kunt ook de speciale optie op de GR gebruiken.

Het aantal rangschikkingen van 5 stripboeken en 3 romans

Je kunt 5 stripboeken en 3 romans op

- $8!$ manieren naast elkaar op een boekenplank rangschikken
- $4! \cdot 5!$ manieren rangschikken als de stripboeken naast elkaar moeten staan
- $2! \cdot 5! \cdot 3!$ manieren rangschikken als de stripboeken en ook de romans naast elkaar moeten staan.

Combinaties

Kies je drie dingen uit zeven dingen zonder op de volgorde te letten, dan heb je te maken met een combinatie van 3 uit 7.

Het aantal combinaties van 3 uit 7 is $\binom{7}{3} = 35$.

Gebruik voor het berekenen van aantallen combinaties de GR.

Bij het aantal afvaardigingen van vier personen uit een klas van

25 leerlingen gaat het om combinaties. Het aantal is $\binom{25}{4} = 12\,650$.

Combinaties vermenigvuldigen en optellen

In de tabel zie je de samenstelling van klas 4 vwo A.

Uit deze klas wordt een comité van vijf leerlingen gevormd.

Het aantal mogelijke comités met

- drie jongens is $\binom{12}{3} \cdot \binom{17}{2} = 29\,920$

3 jongens EN 2 meisjes, dus vermenigvuldigen

- minstens vier jongens is $\binom{12}{4} \cdot \binom{17}{1} + \binom{12}{5} = 9207$.

4 jongens en 1 meisje OF 5 jongens, dus optellen

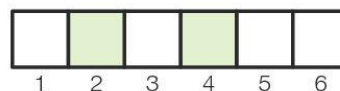
	15 jaar	16 jaar	
jongen	8	4	12
meisje	10	7	17
	18	11	29

4.3 Rijtjes en roosters

042



Een bedrijf voorziet zijn artikelen van een code door in een rijtje van zes vierkantjes er twee groen te maken. Het maken van een code komt dus neer op het kiezen van twee van de zes vierkantjes.

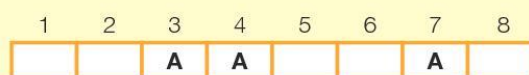


- a Gaat het hierbij om combinaties of om permutaties? Licht toe.
- b Hoeveel codes kan het bedrijf maken?

Theorie A Rijtjes bestaande uit A's en B's

Een voorbeeld van een rijtje met drie A's en vijf B's is ABBBAABB. Het totale aantal rijtjes bestaande uit drie A's en vijf B's vind je als volgt.

Zet in drie van de acht hokjes een A. Dat kan op $\binom{8}{3}$ manieren.



Zet vervolgens vijf B's in de resterende vijf hokjes. Dat kan op

$\binom{5}{5}$ manieren. Dus er zijn $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{5} = \binom{8}{3} = 56$ rijtjes met drie A's en vijf B's.

Je had ook eerst in vijf van de acht hokjes een B kunnen zetten en daarna drie A's in de resterende drie hokjes.

Dat kan op $\binom{8}{5} \cdot \binom{3}{3} = \binom{8}{5} = 56$ manieren.

Het aantal rijtjes bestaande uit drie A's en vijf B's is dus $\binom{8}{3}$ en ook $\binom{8}{5}$. En zo is het aantal rijtjes bestaande uit twee A's en zes B's gelijk aan $\binom{8}{2}$ en ook aan $\binom{8}{6}$.

$$\begin{aligned} \binom{8}{2} &= \binom{8}{6} \\ \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \end{aligned}$$

Het totale aantal rijtjes van acht hokjes met in elk hokje een A of een B is dus gelijk aan $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 256$.

Maar het totale aantal van 256 manieren om acht hokjes met A's en B's te vullen, is ook als volgt te vinden.

Er zijn twee manieren om het eerste hokje te vullen én er zijn twee manieren om het volgende hokje te vullen, enzovoort.

Totaal zijn er $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^8 = 256$ manieren.

Het aantal rijtjes bestaande uit vier A's en zeven B's is

$\binom{11}{4}$ en ook $\binom{11}{7}$.

Het totale aantal rijtjes van elf hokjes met in elk hokje een A of een B is 2^{11} .

43

David gooit tien keer met een geldstuk. Telkens noteert hij K (kop) of M (munt).

Een mogelijke serie is KKMMKMMMKK.

Hoeveel series zijn er

- a met acht keer kop
- b met vijf keer kop
- c in totaal mogelijk
- d die met KK beginnen?

44

Voor een theorie-examen moeten 20 tweekuzevragen worden beantwoord.

- a Hoeveel mogelijkheden zijn er om het formulier in te vullen?
- b Hoeveel mogelijkheden zijn er met 15 juiste antwoorden?
- c Een kandidaat slaagt als hij minstens 80% van de vragen juist beantwoordt.

Op hoeveel manieren kun je het formulier invullen om te slagen?

Hoeveel procent is dat van het totale aantal manieren om het formulier in te vullen?

45

Kees en Frits maken rijtjes bestaande uit drie A's en vijf B's.

Kees zegt: Er zijn $\binom{8}{3}$ rijtjes.

Frits redeneert als volgt.

- Ik moet een rangschikking maken van 8 letters, dus ik heb 8! mogelijkheden.
- Maar er zijn 3 gelijke A's bij, dus ik moet delen door 3! en er zijn 5 gelijke B's bij, dus ik moet delen door 5!.

Het totale aantal rijtjes is dus $\frac{8!}{3! \cdot 5!}$.

- a Controleer dat $\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \binom{8}{3} = \binom{8}{5}$.

Op bladzijde 175 heb je gezien dat $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \binom{5}{3}$. En zo is $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \binom{8}{3}$.

Vermenigvuldig je teller en noemer van $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}$ met 5!, dan krijg je

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3! \cdot 5!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!}. \text{ Hiermee is aangetoond dat } \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \binom{8}{3}.$$

- b Gebruik net als Frits faculteiten om de opgaven 43a en 43b te maken.

A46
 4 0 *

Een bedrijf codeert zijn artikelen met de letters A en B.

Een code van vijf letters is bijvoorbeeld BAABA.

- Hoeveel codes van zeven letters zijn er met minstens vijf A's?
- Hoeveel codes van zes letters zijn er die meer A's dan B's bevatten?
- Hoeveel codes van negen letters zijn er in totaal?

47
 4 0 *

Elsbeth gooit met vijf dobbelstenen. Ze vraagt zich af hoeveel mogelijkheden er zijn om in totaal 28 ogen te gooien. Ze bedenkt dat 66655 één van de mogelijkheden is. Door systematisch de mogelijkheden te noteren, ziet ze dat 'drie zessen en twee vijven' 10 keer voorkomt. Zie hiernaast.

- Hoe kun je dit aantal berekenen met combinaties?

Elsbeth bedenkt dat je met 'vier zessen en een vier' ook aan 28 ogen komt.

- Hoeveel mogelijkheden zijn er om 'vier zessen en een vier' te gooien?
- Hoeveel mogelijkheden zijn er om met vijf dobbelstenen in totaal 28 ogen te gooien?

66655
 66565
 66556
 65665
 65656
 65566
 56665
 56656
 56566
 55666

48
 4 0 *

Hoeveel mogelijkheden zijn er om

- met vier dobbelstenen in totaal 6 ogen te gooien
- met zes dobbelstenen in totaal 34 ogen te gooien?

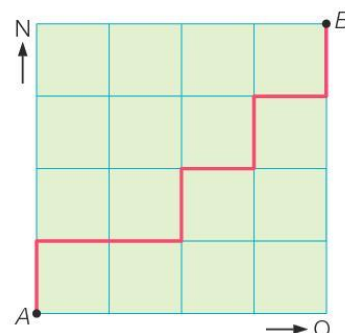
49
 4 0 *

Van sommige moderne steden bestaat de plattegrond uit een rechthoekig stratenplan. Vooral in de VS komt dat veel voor.

In figuur 4.8 zie je een schematische voorstelling van een stukje van zo'n plattegrond. We bekijken hierin routes zonder omwegen van A naar B.

De rode route geven we aan met NOONONON.

- Schrijf nog twee mogelijke routes van A naar B op.
- Hoeveel letters staan in een route van A naar B? Hoe vaak staat de letter N daarbij?
- Hoeveel routes zijn er van A naar B?



figuur 4.8

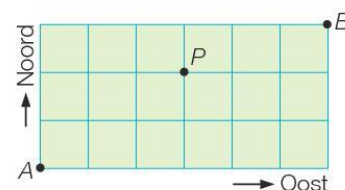
50
 4 0 *

Zie het rooster in figuur 4.9. We vragen ons af hoeveel routes zonder omwegen er zijn van A via P naar B.

Van A naar P zijn er $\binom{5}{2}$ routes en

van P naar B zijn er $\binom{4}{1}$ routes.

- Licht dit toe.
- Licht toe dat er 40 routes zonder omwegen van A via P naar B zijn.
- Hoeveel procent van de routes zonder omwegen van A naar B gaat via P?



figuur 4.9

51



- a Bij een voetbalwedstrijd is de eindstand 2-4. Een mogelijk scoreverloop is 1-0, 1-1, 1-2, 2-2, 2-3, 2-4.

Geef dit scoreverloop in een rooster aan als route van (0, 0) naar (2, 4).

- b Hoeveel scoreverlopen zijn mogelijk met eindstand 2-4?
c Hoeveel scoreverlopen zijn mogelijk met ruststand 3-1 en eindstand 5-4?



A52

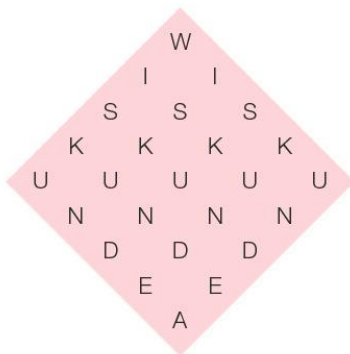


- a Hoeveel scoreverlopen zijn mogelijk bij een voetbalwedstrijd met eindstand 6-3?
b Hoeveel scoreverlopen zijn mogelijk bij een voetbalwedstrijd waarin vier keer gescoord wordt?

A53



- a Op hoeveel manieren kun je in figuur 4.10a WISKUNDE A lezen?
b Op hoeveel manieren kun je in figuur 4.10b GETAL EN RUIMTE lezen?



a



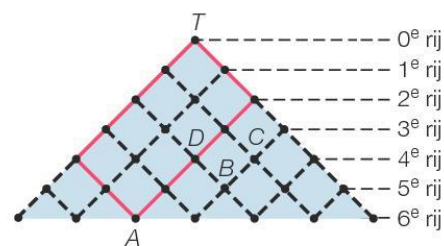
b

figuur 4.10

O54



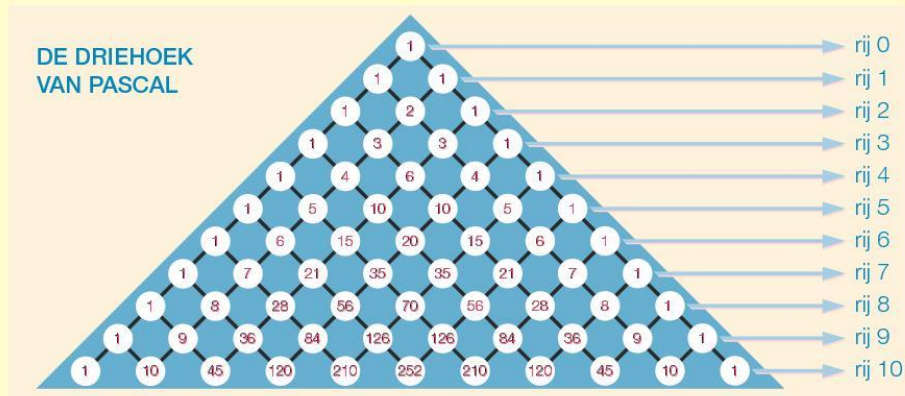
- a Bereken hoeveel kortste routes er zijn van T naar A in het rooster hiernaast.
b Bij elk roosterpunt kun je het aantal kortste routes van T naar dat roosterpunt berekenen. Licht toe dat je in de zesde rij de getallen $\binom{6}{0}$, $\binom{6}{1}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{3}$, $\binom{6}{4}$, $\binom{6}{5}$ en $\binom{6}{6}$ krijgt.
c Het getal bij B kun je krijgen door de getallen bij C en D op te tellen. Je kunt immers alleen maar in B komen via C of via D . Gebruik deze eigenschap om de getallen in de zevende en achtste rij te berekenen.
d Geef de som van de getallen in de tiende rij.



figuur 4.11

Theorie B De driehoek van Pascal

Het driehoekige getallenschema hieronder heet de **driehoek van Pascal**. De driehoek is genoemd naar de Franse filosoof en wiskundige Blaise Pascal (1623-1662).



figuur 4.12

Elk getal in de driehoek van Pascal geeft het aantal kortste routes om vanuit de top op die plaats te komen. De getallen in de n -de rij zijn $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$.

De som van de getallen in de n -de rij is 2^n .

Elk getal krijg je door de twee getallen die er schuin boven staan bij elkaar op te tellen.

GESCHIEDENIS

Blaise Pascal

Blaise Pascal werd in 1623 te Clermont (Frankrijk) geboren. Al op zijn veertiende jaar werd hij toegelaten tot de wekelijkse bijeenkomsten van de Franse Academie der Wetenschappen. Vijf jaar later, in 1642, maakte Pascal een rekenmachine waarmee het mogelijk was getallen op te tellen en af te trekken. Deze machine, een doos vol cilinders en tandwielen, gebruikte hij om zijn vader te helpen bij het vele rekenwerk dat deze als belastingambtenaar moest verrichten. Een van de vraagstukken waar Pascal zich mee bezighield, is het probleem van de verhouding waarin de pot verdeeld

moet worden over de spelers als een dobbelspel voortijdig afgebroken wordt. Hierbij staat de vraag centraal welke kans op winst elke speler heeft op het moment dat het spel wordt afgebroken. Pascal en zijn landgenoot Fermat kwamen uiteindelijk tot een oplossing van het vraagstuk. Als waardering voor zijn grote bijdragen aan de ontwikkeling van de kansrekening en combinatoriek is de driehoek van Pascal naar hem vernoemd. Hij was echter niet de ontdekker van de driehoek. Deze was namelijk al omstreeks 1300 bekend in het oude China.

55
□ ⊗ *

Uit de driehoek van Pascal volgt dat $\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{4}$.

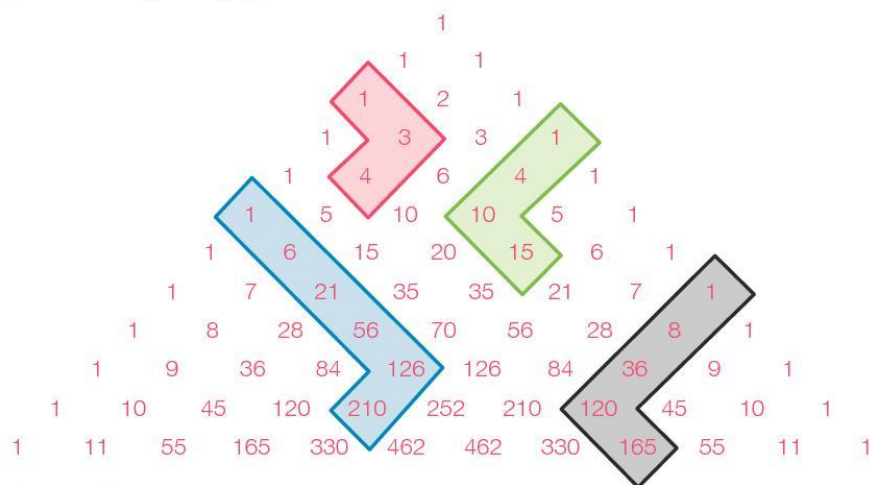
a Licht dit toe.

b Vul in. Uit de driehoek van Pascal volgt

- $\binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \binom{\dots}{\dots}$
- $\binom{12}{8} + \binom{12}{9} = \binom{\dots}{\dots}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{\dots}{\dots}$

56
□ ⊗ *

Hieronder zie je een gedeelte van de driehoek van Pascal waarin enkele patronen zijn aangegeven.



figuur 4.13

Er geldt $1 + 3 = 4$, $1 + 4 + 10 = 15$,

$1 + 6 + 21 + 56 + 126 = 210$ en $1 + 8 + 36 + 120 = 165$.

We noemen zulke patronen hockeystickpatronen.

a Schrijf nog twee hockeystickpatronen op.

Het patroon $1 + 6 + 21 + 56 + 126 = 210$ kun je ook

noteren als $\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \dots + \dots + \dots = \binom{10}{4}$.

b Vul dit verder in.

c Vul in. Uit de driehoek van Pascal volgt

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{\dots}{\dots}.$$



057



In de figuur hiernaast zie je een manier om in zes hokjes drie A's te plaatsen.

a Op hoeveel manieren kan dat in totaal?

Nu worden er van de resterende hokjes twee gekozen waarin een B wordt geplaatst. Hiernaast zie je daarvan een voorbeeld.

b Licht toe dat er $\binom{3}{2}$ manieren zijn om dit te doen.

Er kan nu nog op één manier een C geplaatst worden.

c Gebruik dit om het aantal rijtjes bestaande uit drie A's, twee B's en een C te berekenen.

Om het aantal rijtjes te berekenen kun je ook eerst kijken naar het aantal manieren om C in een hokje te zetten, daarna de twee B's en ten slotte de drie A's.

d Laat zien dat de berekening die daarbij hoort dezelfde uitkomst geeft.

1	2	3	4	5	6
	A	A			A

1	2	3	4	5	6
B	A	A		B	A

1	2	3	4	5	6
B	A	A	C	B	A

Theorie C Rijtjes met meer dan twee letters

Het totale aantal rijtjes bestaande uit drie A's, vier B's en twee C's vind je als volgt.

- Zet in drie van de negen hokjes een A.

Dat kan op $\binom{9}{3}$ manieren.

- Zet vervolgens in vier van de resterende zes hokjes een B.

Dat kan op $\binom{6}{4}$ manieren.

- Zet ten slotte twee C's in de resterende twee hokjes.

Dat kan op $\binom{2}{2} = 1$ manier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	A			A		A		

1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	A	B		A	B	A	B	

1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	A	B	C	A	B	A	B	C

Er zijn dus $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{4} \cdot 1 = \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{4} = 1260$ rijtjes met drie A's, vier B's en twee C's.

Het maakt niet uit met welke letter je begint bij het vullen van de hokjes.

Zet je eerst de vier B's, vervolgens de twee C's en ten slotte de drie A's,

dan krijg je $\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{2}$ mogelijke rijtjes. Ook dit aantal is 1260.

Het totale aantal rijtjes van negen letters, waarbij alleen maar A's, B's en C's worden gebruikt, is $3^9 = 19683$.

Voorbeeld

Bereken het aantal getallen

- a van zes cijfers die bestaan uit drie tweeën, twee vieren en een vijf
- b van acht cijfers die bestaan uit twee enen, vier tweeën, een drie en een vier.

Uitwerking

a aantal = $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 60$

b aantal = $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{1} = 840$

R58



Het aantal rijtjes bestaande uit drie A's, vier B's en vijf C's is

$\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5}$, maar ook $\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}$.

Licht dit toe.

59



- a Hoeveel rijtjes zijn mogelijk met acht A's, vier B's en twee C's?
- b Hoeveel rijtjes zijn mogelijk met drie P's, vijf Q's, één R en vier T's?
- c Bereken het aantal rangschikkingen van de letters van het woord TELEVISIETOESTEL.
- d Bereken het aantal rangschikkingen van de letters van het woord MISSISSIPPI.
- e Hoeveel mogelijkheden zijn er om met vijf dobbelstenen twee zessen, twee vijven en een vier te gooien?
- f Hoeveel mogelijkheden zijn er om met twaalf dobbelstenen elk ogenaantal even vaak te gooien?

A60



- a Vroeger gaven schepen signalen door met behulp van vlaggen. Neem aan dat een signaal uit 10 vlaggen bestaat en dat er 4 rode, 3 blauwe en 3 witte vlaggen zijn.
Hoeveel signalen zijn er te geven?
- b Een telefoonnummer begint met 06 en bestaat verder uit 3 vieren, 4 vijven en 1 negen.
Hoeveel van die telefoonnummers zijn mogelijk?
- c Hoeveel rangschikkingen kun je maken met alle letters van het woord SINAASAPPELS als de drie A's naast elkaar moeten staan?

Terugblik

Rijtes met A's en B's

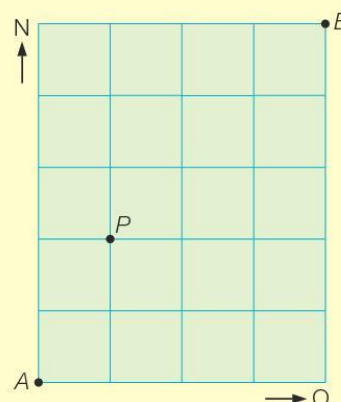
- Het aantal rijtes bestaande uit drie A's en zeven B's is $\binom{10}{3}$ en ook $\binom{10}{7}$.
- Het aantal rijtes met tien hokjes waarbij elk hokje gevuld is met een A of een B is 2^{10} .
- Bij het tien keer gooien met een geldstuk is het aantal series met drie keer munt (en dus zeven keer kop) gelijk aan $\binom{10}{3}$.

Rijtes met meer dan twee letters

- Het aantal rijtes met vier A's, drie B's en zes C's is $\binom{13}{4} \cdot \binom{9}{3}$.
Je kunt bijvoorbeeld ook $\binom{13}{6} \cdot \binom{7}{4}$ berekenen, maar ook $\frac{13!}{4! \cdot 3! \cdot 6!}$.
- Het aantal getallen van acht cijfers met drie vieren, twee vijven en drie achten is $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2}$, maar ook $\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 3!}$.

Routes in een rooster

- Het aantal kortste routes van A naar B in het rooster in de figuur hiernaast is gelijk aan $\binom{9}{5}$ en ook $\binom{9}{4}$.
Je hebt immers te maken met een rijtje bestaande uit vijf N's en vier O's.
- Het aantal kortste routes van A via P naar B is $\binom{3}{2} \cdot \binom{6}{3}$.



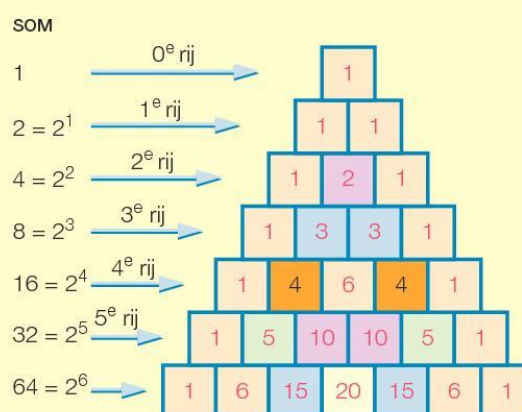
De driehoek van Pascal

In de driehoek van Pascal is elk getal gelijk aan de som van de twee getallen die er schuin boven staan.

In de vierde rij van de driehoek van Pascal staan de getallen

$$\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3} \text{ en } \binom{4}{4}.$$

De som van de getallen in de vierde rij is 2^4 .



4.4 Allerlei telproblemen

061
□ ⊗ *

- a** André heeft zes boeken gekocht. Hij wil er hiervan drie aan zijn vriendin cadeau doen.
Hoeveel drietallen zijn mogelijk?
- b** Dagmar heeft zes boeken gekocht. Zij heeft drie vrienden en aan elk van hen wil ze er één cadeau doen.
Op hoeveel manieren kan dat?
- c** Drie vrienden hebben zes dezelfde boeken gelezen. De leraar Nederlands vraagt aan elk van hen welk boek ze het leukst vonden.
Hoeveel antwoorden zijn mogelijk?

Theorie A Herhalingen, permutaties en combinaties

Bij het oplossen van telproblemen vraag je je het volgende af.

- Is de volgorde van belang?
- Zijn herhalingen toegestaan?
- Heb je te maken met een permutatie of met een combinatie, of moet je systematisch noteren?
- Moet je optellen of vermenigvuldigen?

In de volgende opgaven komen telproblemen door elkaar voor.

Houd bij het oplossen steeds bovenstaande vragen in het achterhoofd.

R62
□ ⊗ *

Van zeven dingen worden er drie gekozen.
Zie het schema hiernaast.

Eén van de vier situaties is niet in dit hoofdstuk aan de orde geweest.

- a** Welke situatie is dat?
- b** Bereken voor de andere drie situaties het aantal mogelijkheden.
- c** Bedenk bij elk van de situaties van vraag b een goede vraag.

		volgorde van belang	
		wel	niet
herhalingen toegestaan	wel		
	niet		

E63
*

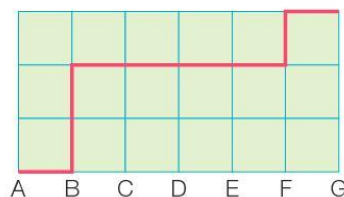
In deze opgave behandelen we de situatie van opgave 62 die nog niet in dit hoofdstuk aan de orde is geweest.
Nico heeft drie briefjes van vijf euro die hij gaat verdelen over zeven personen. Een persoon kan ook meerdere briefjes krijgen.

De mogelijkheden van het verdelen van de briefjes kun je visualiseren met een rooster. In de figuur hiernaast zie je een voorbeeld waarbij persoon B twee briefjes heeft gekregen en persoon F één briefje.

- a** Hoeveel mogelijkheden zijn er om de drie briefjes te verdelen?

Het verdelen van de briefjes in deze opgave is een voorbeeld van een *herhalingscombinatie*. In dit geval een herhalingscombinatie van 3 uit 7.

- b** Hoeveel mogelijkheden zijn er voor een herhalingscombinatie van k uit n ?



figuur 4.14

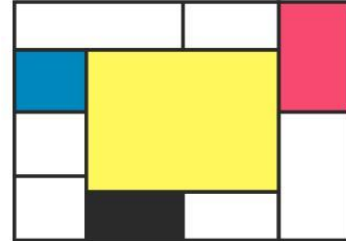
64

Jarno koopt een nieuwe auto. Hij heeft het type en de kleur al gekozen, maar hij moet van tien opties nog zeggen of hij ze wel of niet neemt.

- a Op hoeveel manieren kan hij kiezen?
- b Op hoeveel manieren kan hij kiezen als hij maximaal drie opties wil?

65

Tijdens een ckv-les kleuren de leerlingen de vlakverdeling hiernaast. Van de tien rechthoeken moeten er vier gekleurd worden met rood, geel, blauw en zwart. Elke kleur moet één keer gebruikt worden. De andere rechthoeken blijven wit. Zo ontstaat een Mondriaan-compositie. Hoeveel composities zijn mogelijk?



figuur 4.15

66

In deze opgave gaat het om 'woorden' die je kunt maken met de letters van het woord OPGAVE. Ook niet-bestaande woorden als PGAVOE doen mee.

Bij de vragen a en b mag je elke letter maar één keer gebruiken.

Bereken het aantal mogelijke woorden

- a met zes letters
- b met minimaal twee en maximaal vier letters.

Bij de vragen c en d mag je de letters meer dan één keer gebruiken.

Bereken het aantal mogelijke woorden

- c met tien letters
- d met minimaal twee en maximaal vier letters.

67

Voor een vrijgekomen kamer in een studentenflat hebben zich drie jongens en vier meisjes gemeld. Drie studeren psychologie, twee economie, één wiskunde en één Frans.

De studenten worden uitgenodigd voor een gesprek. Voor elk van hen is een kwartier gereserveerd. De eerste student komt om 20:00 uur, de tweede om 20:15 uur, enzovoort.

Hoeveel volgordes zijn er voor de gesprekken als

- a eerst de vier meisjes aan de beurt zijn
- b de jongens en meisjes om en om een gesprek hebben
- c eerst de student Frans aan de beurt is
- d de twee studenten economie het laatst aan de beurt zijn
- e de eerste student dezelfde studie volgt als de laatste
- f de eerste student niet van hetzelfde geslacht is als de volgende twee?



- 68** In figuur 4.16 zie je een gedeelte van de plattegrond van een badplaats.
 Op hoeveel manieren kun je zonder omwegen
- a van S naar T lopen
 - b van S naar U lopen
 - c van S naar het strand lopen
 - d van S via Y naar het strand lopen?



figuur 4.16

- 69** Een bedrijf met zes kantoren neemt twaalf nieuwe medewerkers aan.
 Op hoeveel manieren kan dat?
- a Ieder kantoor krijgt twee nieuwe medewerkers.
 - b Op hoeveel manieren kunnen deze medewerkers verdeeld worden over de zes kantoren? Het kan dus voorkomen dat de twaalf nieuwe werknemers op één kantoor komen.

- 70** Else heeft van haar personal trainer een trainingsschema gekregen voor in de sportschool. Ze moet twee vloeroefeningen doen, drie oefeningen met losse gewichten, vier oefeningen op apparaten en een half uur cardio.
- a In hoeveel verschillende volgordes kan ze de oefeningen doen als ze vrij kan kiezen?
 - b Hoeveel volgordes zijn er mogelijk als ze de oefeningen met losse gewichten meteen na elkaar wil doen?
 - c Hoeveel volgordes zijn er mogelijk als ze begint met cardio en daarna de oefeningen per soort na elkaar doet?



- 71** Winkelier Gerritzen heeft zijn etalage versierd met feestverlichting. Deze verlichting bestaat uit 19 lampjes die onafhankelijk van elkaar groen licht, rood licht of geen licht geven.
 Een mogelijke situatie is: de lampjes 2, 5, 7, 9, 10, 12 en 18 branden groen, de lampjes 3, 8, 13, 16 en 19 branden rood en de overige lampjes zijn uit.
- a Hoeveel situaties zijn er in totaal mogelijk?
- In hoeveel situaties branden
- b er vijf lampjes rood en de rest groen
 - c er zes lampjes rood en zes lampjes groen
 - d alle lampjes waarbij er minder dan drie rood zijn
 - e in elk geval het eerste, het middelste en het laatste lampje
 - f er vijf lampjes niet?

72
□ ⊙ *

Valentijn neemt altijd een reep als tussendoortje mee naar school. Hij heeft nu nog 6 repen in de smaak cashew & blauwe bes, 8 repen met pecan, 4 in de smaak cacao & sinaasappel en 3 in de smaak amandel & abrikoos.

De komende maand moet hij 21 dagen naar school.

Op hoeveel manieren kan hij de repen over de dagen verdelen? Ga ervan uit dat repen in dezelfde smaak volledig uitwisselbaar zijn.

73
⊙ *

Smartphones en tablets kunnen vergrendeld worden tegen oneigenlijk gebruik door derden. Daarvoor zijn verschillende methoden. Eva beveiligd haar smartphone met een viercijferige pincode.

a Hoeveel mogelijke pincodes zijn er?

Eva ontgrendelt vaak haar smartphone en zet hem direct daarna weer op stand-by. Op de foto hiernaast zie je de telefoon van Eva waarop zij net haar pincode heeft ingevoerd. Er zijn duidelijk vier vingerafdrukken zichtbaar.

b Hoeveel pincodes zijn er mogelijk?

Volgens Luuk is het voor Eva beter om slechts drie verschillende cijfers te gebruiken in haar pincode, want bij drie vingerafdrukken zijn er meer pincodes mogelijk.

c Laat met een berekening zien dat Luuk gelijk heeft.

d Onderzoek of er met twee verschillende cijfers meer pincodes mogelijk zijn dan met drie verschillende cijfers.



74
*

Op het startscherm van de smartphone van Zoë is in een 4×4 rooster plaats voor 16 icoontjes van apps. Zoë gebruikt niet alle 16 plaatsen. Zij heeft de 12 icoontjes van haar meest gebruikte apps op het startscherm gerangschikt.

a Op hoeveel manieren kan dit?

b Op hoeveel manieren kan dit als ze de linker kolom leeg laat?

c Op hoeveel manieren kan dit als ze in elke rij één plaats leeg laat?

Zoë wil de 4 icoontjes van haar socialmedia-apps op één rij of in één kolom. Verder maakt het haar niet uit.

d Hoeveel mogelijkheden zijn er?



Eindopdracht Houdbaarheid van de kentekens

In Nederland hebben de auto's kentekens bestaande uit letters en cijfers, in totaal zes stuks. Je kunt je afvragen hoelang dit systeem meegaat.

In de beginopdracht heb je gezien dat er gewoonlijk gebruik wordt gemaakt van 16 verschillende letters, te weten B, D, F, G, H, J, K, L, N, P, R, S, T, V, X en Z. Verder worden alle cijfers gebruikt, dus ook de 0.

Je hebt ook gezien dat sidecode 8 van maart 2013 tot maart 2015 werd gebruikt. Hierbij werd een kenteken gevormd door één cijfer, een rijtje van drie letters en dan een rijtje van twee cijfers. Zie het voorbeeld hieronder.



In deze serie werden als beginletter slechts de K, S, T, X en Z gebruikt.

De periode waarin sidecode 8 werd gebruikt, kun je gebruiken om te schatten hoelang je gebruik kunt maken van kentekens die vergelijkbaar zijn met het huidige systeem.

Doe daarvoor de volgende aannames.

- Alle kentekens bestaan uit zes letters en cijfers.
- Er komen in ieder kenteken 2, 3 of 4 letters voor, en verder cijfers.
- De eerdergenoemde 16 letters worden gebruikt, maar de eerste letter die voorkomt in het kenteken is nooit een B of V.

In werkelijkheid worden bepaalde samenstellingen van letters niet uitgegeven, zoals VVD of TBS. Hiermee hoeft je geen rekening te houden in je berekeningen. Ook hoeft je geen rekening te houden met de indeling in rijtjes en de streepjes tussen de rijtjes. KB-FF-56 lees je dus als KBFF56.

- Gebruik sidecode 8 om de totale periode te schatten waarin gebruik kan worden gemaakt van kentekens die voldoen aan de genoemde aannames.

Diagnostische toets

4.1 Regels voor telproblemen

- 1** Victor gooit met twee dobbelstenen.
Hoeveel mogelijkheden zijn er
 - a** om in totaal acht ogen te gooien
 - b** om meer dan acht ogen te gooien
 - c** waarbij het product van de ogen minder dan tien is?

- 2** Hoeveel mogelijkheden zijn er om met drie dobbelstenen in totaal
 - a** minder dan zes ogen te gooien
 - b** precies zes ogen te gooien?

- 3** In deze opgave gaat het om getallen van vijf cijfers, waarin alleen maar de cijfers 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8 voorkomen.
Hoeveel van die getallen zijn er in het geval dat
 - a** elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
 - b** elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 50 000 moet zijn
 - c** elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden
 - d** elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal groter dan 54 000 moet zijn?

4.2 Permutaties en combinaties

- 4** In een fietsenrek is plaats voor acht fietsen. Drie jongens en vijf meisjes zetten hun fiets in het rek.
 - a** Op hoeveel manieren kan dat?
 - b** Op hoeveel manieren kan dat als de jongens hun fietsen naast elkaar zetten?
 - c** Op hoeveel manieren kan dat als aan de buitenkant de fietsen van twee meisjes staan?
 - d** De meisjes mogen van de galante jongens hun fietsen eerst in het rek plaatsen.
Op hoeveel manieren kunnen de meisjes hun fiets neerzetten?

- 5** Op een kinderdagverblijf zitten in een groep zes peuters, vijf dreumesen en drie baby's.
Leidster Monique gaat met vier kinderen wandelen.
Hoeveel viertallen zijn mogelijk
 - a** met twee peuters, één dreumes en één baby
 - b** met meer dan twee dreumesen
 - c** zonder baby's?

4.3 Rijtjes en roosters

- 6** Jan gooit elf keer met een geldstuk.
- a** Hoeveel mogelijkheden zijn er om zes keer kop te gooien?
 - b** Hoeveel mogelijkheden zijn er om meer dan zeven keer kop te gooien?
 - c** Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?
- 7** Tim en Stijn spelen tafelvoetbal. Het spel is voorbij als er tien doelpunten gemaakt zijn.
- a** Hoeveel scoreverlopen zijn er in totaal mogelijk?
 - b** Hoeveel scoreverlopen eindigen in een gelijke stand?
 - c** Tim scoort de eerst drie doelpunten, maar Stijn weet toch te winnen. Hoeveel scoreverlopen zijn er voor deze wedstrijd mogelijk?

- 8** François Morellet was een Franse kunstenaar die zich onder andere heeft laten inspireren door de werken van Piet Mondriaan. Een van zijn kunstwerken heet *40% bleu, 40% rouge, 10% vert et 10% orange* en hangt in het Stedelijk Museum Amsterdam. Dit schilderij bestaat uit 56 bij 56 even grote vierkantjes. De vierkantjes zijn willekeurig gekleurd, waarbij 40% van de vierkantjes blauw is geschilderd, 40% rood, 10% groen en 10% oranje.



In deze opgave kijken we naar een veel kleinere, rechthoekige variant van dit werk dat bestaat uit 6 bij 5 vierkantjes. Verder worden dezelfde kleuren en verhoudingen gebruikt als in het origineel. Bereken hoeveel verschillende schilderijen je in dit geval kunt maken.

4.4 Allerlei telproblemen

- 9** Op station Holten stappen 14 personen in een trein met drie treinstellen. Op hoeveel verschillende manieren kunnen zij zich verdelen over de treinstellen?
- 10** In deze opgave gaat het om de letters van het woord MAATSTAVEN.
- a** Hoeveel rangschikkingen kun je met deze letters maken?

In de rest van deze opgave gaat het om 'woorden' die je kunt maken met de letters M, A, T, S, V, E en N. Ook niet bestaande woorden als VMATSE doen mee.

Bereken het aantal mogelijke woorden

- b** van vijf verschillende letters
- c** van twee of drie verschillende letters
- d** met minimaal twee en maximaal vier letters waarbij elke letter vaker mag worden gekozen.