

4 Combinatoriek

Voorkennis De vermenigvuldigingsregel en de somregel

Bladzijde 164

- 1**
- a aantal = $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$
 - b AAA of BBB
aantal = $2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 52$
 - c ACA of CAA
aantal = $2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 5 = 40$
 - d $\bar{B}\bar{B}\bar{B}$ ($\bar{B}$ betekent geen B)
aantal = $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$
 - e rood rood rood of geel geel geel of groen groen groen of blauw blauw blauw
aantal = $2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 20$
 - f groen groen rood of groen rood groen of rood groen groen
aantal = $1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
- 2**
- a aantal = $11 \cdot 8 \cdot 5 = 440$
 - b aantal = $11 \cdot (8 + 5) = 11 \cdot 13 = 143$

4.1 Regels voor telproblemen

Bladzijde 165

1

a

SOM VAN DE OGEN

	6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12	
5	6	7	8	9	10	11	
4	5	6	7	8	9	10	
3	4	5	6	7	8	9	
2	3	4	5	6	7	8	
1	2	3	4	5	6	7	
	1	2	3	4	5	6	

rode dobbelsteen

blauwe dobbelsteen

- b Zie de groene vakjes. Er zijn 10 mogelijkheden.
- c 66 65 64 63
56 55 54
46 45
36

Bladzijde 166

- 2**
- a Er worden $n \cdot (n - 1) = n^2 - n$ wedstrijden gespeeld. Dus $N = n^2 - n$.
 - b Bij een halve competitie speelt elk team één keer tegen elk ander team.

- 3 a** Liefst een rooster.

b

	4v1	4v2	4h1	4h2	4h3
4v1	–	–	–	–	–
4v2		–	–	–	–
4h1			–	–	–
4h2				–	–
4h3					–

Zie de lege vakjes. Er zijn 10 wedstrijden.

Alternatieve uitwerking

In een hele competitie met 5 teams speelt elk van de 5 teams 4 thuiswedstrijden.

Dit geeft $5 \cdot 4 = 20$ wedstrijden.

In een halve competitie zijn er dus $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ wedstrijden.

- c** In een hele competitie met n teams worden $n^2 - n$ wedstrijden gespeeld.

In een halve competitie wordt de helft van het aantal wedstrijden gespeeld.

$$\text{Dus } N = \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$$

Alternatieve uitwerking

Tel eerst alle hokjes in het rooster ($n \cdot n = n^2$).

Trek daar de n hokjes van de diagonaal linksboven naar rechtsonder van af.

Deel het resultaat door 2.

$$\text{Dus } N = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$$

- 4 a** Zie de uitwerking van opgave 3c hierboven.

b $\frac{1}{2}(n^2 - n) = 45$

$$n^2 - n = 90$$

$$n^2 - n - 90 = 0$$

$$(n + 9)(n - 10) = 0$$

$$n = -9 \text{ of } n = 10$$

Dus er zijn 10 deelnemende teams.

- 5 a** In elke groep van 5 teams worden $5 \cdot 4 = 20$ wedstrijden gespeeld.

In de voorronde worden dus $8 \cdot 20 = 160$ wedstrijden gespeeld.

In de eerste ronde van het afvalsysteem worden $4 \cdot 2 = 8$ wedstrijden gespeeld.

De overgebleven 4 teams spelen in de volgende ronde $2 \cdot 2 = 4$ wedstrijden.

De laatste 2 teams spelen nog 2 wedstrijden.

In totaal zijn er dus $8 + 4 + 2 = 14$ wedstrijden in het afvalsysteem.

In totaal zijn er dus $160 + 14 = 174$ wedstrijden.

Alternatieve uitwerking

In elke groep van 5 teams worden $5 \cdot 4 = 20$ wedstrijden gespeeld.

In de voorronde worden dus $8 \cdot 20 = 160$ wedstrijden gespeeld.

Bij een afvalsysteem met een uit- en een thuiswedstrijd valt er per twee wedstrijden één team af (de verliezer). Er moeten 7 teams afvallen voor de winnaar bekend is.

In het afvalsysteem worden dus $7 \cdot 2 = 14$ wedstrijden gespeeld.

In totaal zijn er dus $160 + 14 = 174$ wedstrijden.

- b** De kampioen heeft in de voorronde $4 \cdot 2 = 8$ wedstrijden gespeeld en in de finaleronde $3 \cdot 2 = 6$ wedstrijden. In totaal dus $8 + 6 = 14$ wedstrijden.

- 6** Als je de dagen van de week nummert van 1 t/m 7 kun je de mogelijkheden als volgt systematisch noteren:
135, 136, 146, 246, 247, 257, 357
Er zijn dus 7 mogelijke schema's.

Bladzijde 167

7 a

SOM

4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	2	3	4	5	6	7	8

Er zijn 4 mogelijkheden om 8 te gooien.

- b** Er zijn 18 mogelijkheden om minder dan 8 te gooien.

c

PRODUCT

4	4	8	12	16	20	24	28	32
3	3	6	9	12	15	18	21	24
2	2	4	6	8	10	12	14	16
1	1	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7	8

Er zijn 3 mogelijkheden om product 8 te krijgen.

- 8** Met rood eerst zijn er 4 mogelijkheden, namelijk

r g b

r b g

r g r

r b r

En zo zijn er met geel en met blauw eerst ook elk 4 mogelijkheden.

Dus in totaal zijn er $3 \cdot 4 = 12$ mogelijke achtergronden.

- 9 a** mogelijkheden 665 656 566
aantal = 3

- b** mogelijkheden 664 646 466
 655 565 556

aantal = $3 + 3 = 6$

- c** bij som = 16 zijn er 6 mogelijkheden (zie vraag b)

bij som = 17 zijn er 3 mogelijkheden (zie vraag a)

bij som = 18 is er alleen de mogelijkheid 666

aantal = $6 + 3 + 1 = 10$

- d** mogelijkheden 114 141 411
 123 132 213 231 312 321
 222

aantal = $3 + 6 + 1 = 10$

- 10** mogelijkheden 111 123 135 147 159
 210 222 234 246 258
 321 333 345 357 369
 420 432 444 456 468
 531 543 555 567 579
 630 642 654 666 678
 741 753 764 777 789
 840 852 864 876 888
 951 963 975 987 999

aantal = $9 \cdot 5 = 45$

- 11** Als de letters verschillend moeten zijn, dan aantal = $4 \cdot 3 = 12$.

Als de letters gelijk mogen zijn, dan aantal = $4 \cdot 4 = 16$.

Bladzijde 169

- 12** a aantal = $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
 b Het eerste cijfer is 3 of 4 of 5.
 aantal = $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$
 c Het eerste cijfer is 6 en het tweede cijfer is 5, 6, 7 of 8 OF het eerste cijfer is 7 of 8.
 aantal = $1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 576$
- 13** a aantal = $10 \cdot 17 \cdot 16 = 2720$
 b aantal = $10 \cdot 8 \cdot 7 = 560$
 c Bekijk eerst foto's, dan verslag, ten slotte route.
 N, F, N of F OF F, N, N of F
 aantal = $8 \cdot 10 \cdot 16 + 10 \cdot 8 \cdot 16 = 2560$
- 14** a aantal = $26 \cdot 26 \cdot 26 = 17576$
 b aantal = $26 \cdot 25 \cdot 25 = 16250$
 c aantal = $1 \cdot 26 \cdot 26 = 676$
- 15** a • aantal = $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
 • aantal = $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
 b • aantal = $6 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1956$
 • aantal = $6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 + 6^6 = 55986$

Bladzijde 170

- 16** a Hoeveel vierlettercodes zijn er als herhalingen zijn toegestaan?
 b Hoeveel drielettercodes zijn er met drie verschillende letters?
 c Hoeveel vijflettercodes zijn er waarbij de tweede letter niet dezelfde is als de eerste letter?
 d Hoeveel drielettercodes zijn er als geen gelijke letters naast elkaar mogen staan?
- 17** a aantal = $14 \cdot 5 = 70$
 b 16, 16 of 16, 16
 aantal = $5 \cdot 26 + 26 \cdot 5 = 260$
 c j m of m j
 aantal = $14 \cdot 17 + 17 \cdot 14 = 476$
 d 15, 15 of 16, 16 of 17, 17
 aantal = $19 \cdot 18 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 404$
 e 16, 15 of 17, 16 of 17, 15
 aantal = $5 \cdot 19 + 7 \cdot 5 + 7 \cdot 19 = 263$
- 18** Als het eerste cijfer een 1 of een 3 is, dan is het tweede cijfer een 2. Op alle oneven posities kan ze daarna kiezen uit een 1 of een 3, en op alle even posities moet ze een 2 zetten. Dat zijn 2^5 mogelijkheden.
 Als het eerste cijfer een 2 is, dan staat op alle even posities een 1 of een 3, en op alle oneven posities een 2. Dat zijn ook 2^5 mogelijkheden.
 aantal = $2^5 + 2^5 = 64$

4.2 Permutaties en combinaties**Bladzijde 172**

- 19** a aantal = $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
 b aantal = $10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1 = 3\,628\,800$

Bladzijde 173

- 20** a aantal = $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$
 b aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$
 c aantal = $14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 5 = 3\,632\,428\,800$
- 21** a aantal = $4! = 24$
 b aantal = $1 \cdot 3! = 6$

- 22**
- a** aantal = $8! = 40\,320$
 - b** aantal = $4! \cdot 5! = 2880$
 - c** De twee ‘pakketjes’ kunnen op 2 manieren gezet worden, namelijk eerst de scheikundeboeken en dan de wiskundeboeken, of omgekeerd. Binnen het pakketje scheikundeboeken zijn $3!$ mogelijke volgorden en binnen het pakketje wiskundeboeken zijn dat er $5!$.
aantal = $2 \cdot 3! \cdot 5! = 1440$

Bladzijde 174

- 23** **a** Kies eerst een klassiek stuk en dan een jazznummer.
aantal = $4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \cdot 7! = 60480$
- b** Vat de 3 jazznummers als 1 nummer op, dan zijn er 7 nummers in totaal.
De 3 jazznummers kunnen onderling nog op $3!$ manieren worden gerangschikt.
aantal = $7! \cdot 3! = 30240$
- c** KkKkKkKkKk
aantal = $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5! \cdot 4! = 2880$
- d** Voor de drie ‘blokjes’ met genres zijn er $3!$ mogelijke volgorden.
Binnen de genres zijn er $4!$, $3!$ en $2!$ mogelijke volgordes.
aantal = $3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! = 1728$

- 24** **a** aantal = $12 \cdot 11 = 132$
b aantal = $12! = 479\,001\,600$
c aantal = $7! \cdot 6! = 3\,628\,880$

- 25** Als er geen voorwaarde zou zijn, waren er $5! = 120$ manieren. Bij de helft van deze manieren staat B dichterbij de locomotief dan A.
Dus aantal $= \frac{1}{2} \cdot 120 = 60$.

- 26 a** Hoeveel zeslettercodes zijn er met zes verschillende letters?
- b** Hoeveel drielettercodes zijn er met drie verschillende letters?
- c** Hoeveel vierlettercodes zijn er als herhalingen zijn toegestaan?
- d** Hoeveel vierlettercodes zijn er, waarbij de eerste letter een a of een b is, en de andere letters moeten worden gekozen uit c, d, e en f, waarbij herhalingen zijn toegestaan?
- e** Hoeveel zeslettercodes zijn er met zes verschillende letters, waarbij de klinkers naast elkaar staan?
- f** Hoeveel zeslettercodes zijn er met zes verschillende letters, waarbij de klinkers en de medeklinkers naast elkaar staan?

- 27** **a** aantal = $4 \cdot 3 = 12$
b De helft van 12, dus 6.

Bladzijde 176

- 28** **a** combinaties **d** permutaties
b permutaties **e** permutaties
c combinaties **f** combinaties

- 29** **a** aantal = $\binom{25}{5} = 53\,130$
- b** aantal = $\binom{25}{20} = 53\,130$, dus het klopt.
- c** Ook met andere getallenvoorbeelden blijkt het te kloppen, bijvoorbeeld:
- $\binom{10}{2} = \binom{10}{8} = 45$
 - $\binom{12}{5} = \binom{12}{7} = 792$

- 30** a aantal = $\binom{18}{4} = 3060$
 b aantal = $\binom{45}{6} = 8\,145\,060$
 c aantal = $\binom{20}{15} = 15\,504$

Bladzijde 177

- 31** a aantal = $\binom{15}{4} = 1365$
 b Het aantal wordt $\binom{12}{3} = 220$, dus het aantal vermindert met $1365 - 220 = 1145$.
32 a aantal = $\binom{12}{3} = 220$
 b aantal = $12! = 479\,001\,600$
 c aantal = $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 665\,280$
 d Het ordenen van de drie vakken kan op 3! manieren.
 Binnen de vakken zijn er 4!, 3! en 5! mogelijke volgordes.
 aantal = $3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 5! = 103\,680$

Bladzijde 178

- 33** a Higgins wint het laatste frame en van de eerste 13 wint hij er 8.
 aantal = $\binom{13}{8} = 1287$
 b Van de eerste 16 frames winnen beide spelers er 8. Voor het laatste frame zijn er 2 mogelijkheden.
 aantal = $2 \cdot \binom{16}{8} = 25\,740$
 c Hawkins wint het laatste frame en 8 frames van de eerste 8, 9, 10, 11 of 12.
 aantal = $\binom{8}{8} + \binom{9}{8} + \binom{10}{8} + \binom{11}{8} + \binom{12}{8} = 715$
34 a aantal = $\binom{28}{8} = 3\,108\,105$
 b aantal = $8! = 40\,320$
 c aantal = $\binom{8}{5} = 56$
 d aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$
35 a $\binom{17}{0} = 1$ $\binom{17}{1} = 17$ $\binom{17}{16} = 17$ $\binom{17}{17} = 1$
 b Je kunt op één manier 0 personen kiezen uit een groep van 17.
 Je kunt op 17 manieren 1 persoon kiezen uit een groep van 17.
 Je kunt op 17 manieren 16 personen kiezen uit een groep van 17. Je kiest er immers altijd 1 niet.
 Je kunt op één manier 17 personen kiezen uit een groep van 17.
 c $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{n-1} = n$ $\binom{n}{n} = 1$
36 a aantal = $\binom{60}{5} = 5\,461\,512$
 b aantal = $\binom{40}{4} = 91\,390$
 c aantal = $\binom{60}{5} \cdot \binom{40}{4} \approx 5,0 \cdot 10^{11}$

Bladzijde 179

- 37** a aantal = $\binom{6}{3} \cdot \binom{9}{3} = 1680$
 b aantal = $\binom{6}{6} = 1$
 c aantal = $\binom{6}{6} + \binom{6}{5} \cdot \binom{9}{1} = 55$
 d aantal = $\binom{6}{5} \cdot \binom{9}{1} + \binom{6}{6} = 55$

Alternatieve uitwerking

aantal = aantal met 5 of 6 jongens
 = aantal met 1 of 0 meisjes
 = 55 (zie c)

- 38** a aantal = $\binom{12}{5} = 792$
 b aantal = aantal met beide broers + aantal zonder de broers = $\binom{2}{2} \cdot \binom{10}{3} + \binom{10}{5} = 372$
 c aantal = aantal met Thiago + aantal met Don + aantal zonder Thiago en Don
 = $\binom{1}{1} \cdot \binom{10}{4} + \binom{1}{1} \cdot \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 672$
- 39** Voor het drietal zijn er 13 mogelijkheden en voor het tweetal 12 mogelijkheden.
 In het drietal komen drie van de vier soorten voor, in het tweetal twee van de vier.
 aantal = $13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} = 3744$

Bladzijde 180

- 40** Als Ivo en Sandra meegaan, dan kan de rest kiezen tussen wel of niet meegaan. Dat geeft $2^5 = 32$ mogelijkheden.
 Als Ivo en Sandra niet meegaan, dan moeten er van de andere vijf minstens twee meegaan. Dat geeft $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 26$ mogelijkheden.
 aantal = $32 + 26 = 58$
- 41** a aantal = $\binom{21}{8} = 203\,490$
 b aantal = $\binom{19}{5} = 11\,628$
 c aantal = $\binom{9}{6} \cdot \binom{6}{2} + \binom{9}{7} \cdot \binom{6}{1} + \binom{9}{8} = 1485$
 d aantal = $\binom{6}{2} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{6}{2} = 28\,350$
 e Je kunt kiezen uit 4 verschillende desserts of geen dessert, dus 5 keuzes.
 aantal = $\binom{21}{4} \cdot 5 = 29\,925$

4.3 Rijtjes en roosters**Bladzijde 182**

- 42** a Combinaties, de volgorde waarin de groene vierkantjes gekozen worden is niet van belang.
 b aantal = $\binom{6}{2} = 15$

Bladzijde 183

- 43** a aantal = $\binom{10}{8} = 45$
 b aantal = $\binom{10}{5} = 252$
 c aantal = $2^{10} = 1024$
 d aantal = $1 \cdot 1 \cdot 2^8 = 256$
- 44** a aantal = $2^{20} = 1\,048\,576$
 b aantal = $\binom{20}{15} = 15\,504$
 c minstens 80% van 20 is minstens 16
 aantal = $\binom{20}{16} + \binom{20}{17} + \binom{20}{18} + \binom{20}{19} + \binom{20}{20} = 6196$
 Dat is $\frac{6196}{1\,048\,576} \times 100\% \approx 0,6\%$.
- 45** a $\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$ (zie ook theorie A op blz 182) en $\frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$
 Dus $\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \binom{8}{3} = \binom{8}{5}$ klopt.
 b 43a aantal = $\frac{10!}{8! \cdot 2!} = 45$
 43b aantal = $\frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$

Bladzijde 184

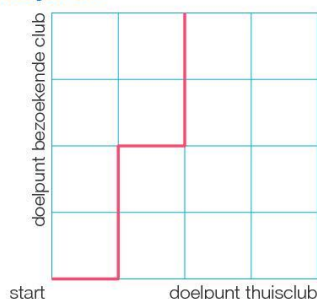
- 46** a aantal = $\binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 29$
 b Meer A's dan B's, dus 4, 5 of 6 A's.
 aantal = $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 22$
 c aantal = $2^9 = 512$
- 47** a aantal = $\binom{5}{3} = 10$
 b aantal = $\binom{5}{4} = 5$
 c aantal = $10 + 5 = 15$
- 48** a 'drie enen en één drie' of 'twee enen en twee tweeën'
 aantal = $\binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 10$
 b 'vijf zessen en één vier' of 'vier zessen en twee vijven'
 aantal = $\binom{6}{5} + \binom{6}{4} = 21$
- 49** a NNOONNOO en OONNOONN
 b Acht letters met vier keer de letter N.
 c aantal routes = $\binom{8}{4} = 70$
- 50** a Van A naar P heb je te maken met een rijtje bestaande uit twee N's en drie O's.
 Dat zijn $\binom{5}{2}$ mogelijkheden.
 Van P naar B heb je te maken met een rijtje bestaande uit één N en 3 O's.
 Dat zijn $\binom{4}{1}$ mogelijkheden.

- b** Van A naar P en van P naar B , dus totaal aantal routes is $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} = 40$.
- c** Aantal routes van A naar $B = \binom{9}{3} = 84$. Daarvan gaan er 40 via P .
Dat is $\frac{40}{84} \times 100\% \approx 47,6\%$.

Bladzijde 185

51

a



- b** aantal = $\binom{6}{4} = 15$
- c** aantal = $\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{3} = 40$

52

- a** aantal = $\binom{9}{3} = 84$

- b** aantal = $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 16$

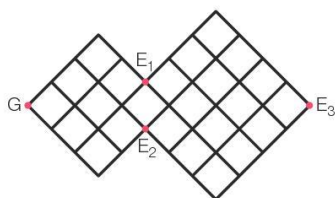
Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

53

- a** aantal = $\binom{8}{4} = 70$

- b** Je loopt het volgende rooster.



Om van G naar E_3 te komen, moet je via E_1 of via E_2 .

Dus $G E_1 E_3$ of $G E_2 E_3$.

$$\text{aantal} = \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} + \binom{5}{3} \cdot \binom{7}{4} = 10 \cdot 35 + 10 \cdot 35 = 700$$

54

- a** Om van T in A te komen, moet je 6 wegen doorlopen, waarvan er 2 naar rechts gaan.

$$\text{Dus } \binom{6}{2} = 15 \text{ routes.}$$

- b** Om in het punt linksonder te komen, moet je 0 keer naar rechts, dus $\binom{6}{0}$ routes

naar dit punt. Zo zijn er $\binom{6}{1}$ routes naar het punt daarnaast, $\binom{6}{2}$ routes naar A , enzovoort.

In de zesde rij staan dus de getallen $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \binom{6}{2}, \binom{6}{3}, \binom{6}{4}, \binom{6}{5}$ en $\binom{6}{6}$.

- c De getallen in de zevende rij zijn
 $1, 1 + 6 = 7, 6 + 15 = 21, 15 + 20 = 35, 20 + 15 = 35, 15 + 6 = 21, 6 + 1 = 7$ en 1.
 De getallen in de achtste rij zijn
 $1, 1 + 7 = 8, 7 + 21 = 28, 21 + 35 = 56, 35 + 35 = 70, 35 + 21 = 56,$
 $21 + 7 = 28, 7 + 1 = 8$ en 1.
- d Om op de 10^e rij te komen heb je 10 keer keus tussen ‘naar links’ en ‘naar rechts’.
 Dus er zijn in totaal $2^{10} = 1024$ routes.

Alternatieve uitwerking

De som van de getallen in de 10e rij is $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \dots + \binom{10}{10} = 1024$.

Bladzijde 187

- 55 a Elk getal in de driehoek van Pascal krijg je door de twee getallen die er schuin boven staan op te tellen.
 $\binom{9}{4}$ is het 5^e getal in rij 9. $\binom{8}{3}$ is het 4^e getal in rij 8 en $\binom{8}{4}$ is het 5^e getal in rij 8.
 $\binom{8}{3}$ en $\binom{8}{4}$ staan precies schuin boven $\binom{9}{4}$.
- b • $\binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \binom{10}{5}$
 • $\binom{12}{8} + \binom{12}{9} = \binom{13}{9}$
 • $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- 56 a Bijvoorbeeld $1 + 4 + 10 + 20 = 35$ en $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$.
- b $\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{7}{2} + \binom{8}{3} + \binom{9}{4} = \binom{10}{4}$
- c $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{2}$

Bladzijde 188

- 57 a aantal = $\binom{6}{3} = 20$
- b Er zijn nog drie hokjes, waarin 2 B's geplaatst moeten worden.
- c aantal = $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = 60$
- d aantal = $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = 60$

Bladzijde 189

- 58 aantal = $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5}$, zie theorie C op bladzijde 188.
- aantal = $\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}$, zie opgave 45.

- 59 a aantal = $\binom{14}{8} \cdot \binom{6}{4} = 45\,045$
- Alternatieve uitwerking
 aantal = $\frac{14!}{8! \cdot 4! \cdot 2!} = 45\,045$
- b aantal = $\binom{13}{3} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{1} = 360\,360$
- Alternatieve uitwerking
 aantal = $\frac{13!}{3! \cdot 5! \cdot 4!} = 360\,360$

$$\text{c} \quad \text{aantal} = \binom{16}{3} \cdot \binom{13}{5} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 3\,632\,428\,800$$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{16!}{3! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 3\,632\,428\,800$$

$$\text{d} \quad \text{aantal} = \binom{11}{1} \cdot \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} = 34\,650$$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34\,650$$

$$\text{e} \quad \text{aantal} = \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30$$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$$

$$\text{f} \quad \text{aantal} = \binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 7\,484\,400$$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{12!}{(2!)^6} = 7\,484\,400$$

60 a $\text{aantal} = \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} = 4200$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!} = 4200$$

b $\text{aantal} = \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{4} = 280$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{8!}{3! \cdot 4!} = 280$$

c Er zijn 12 letters, maar de 3 A's tellen voor 1. Verder 3 × een S, 2 × een P en 1 × een I, N en L.

$$\text{aantal} = \binom{10}{1} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 302\,400$$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{10!}{3! \cdot 2!} = 302\,400$$

4.4 Allerlei telproblemen

Bladzijde 191

61 a $\text{aantal} = \binom{6}{3} = 20$

b $\text{aantal} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

c $\text{aantal} = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

62 a volgorde niet van belang, herhalingen wel toegestaan

		volgorde van belang	
		wel	niet
herhalingen toegestaan	wel	$7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$	-
	niet	$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$	$\binom{7}{3} = 35$

c Op hoeveel manieren kun je ...

		volgorde van belang	
		wel	niet
herhalingen toegestaan	wel	... drie personen hun favoriete liedje laten kiezen uit een playlist van zeven?	-
	niet	... een top-3 maken uit een playlist van zeven liedjes?	... drie liedjes kiezen uit een playlist van zeven?

63 a aantal = $\binom{9}{3} = 84$

b aantal = $\binom{n+k-1}{k}$

Bladzijde 192

64 a aantal = $2^{10} = 1024$

b aantal = $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 176$

65 aantal = $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

66 a aantal = $6! = 720$

b aantal = $6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 510$

c aantal = $6^{10} = 60466176$

d aantal = $6^2 + 6^3 + 6^4 = 1548$

67 a aantal = $4! \cdot 3! = 144$

b m j m j m j m

aantal = $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 144$

c aantal = $1 \cdot 6! = 720$

d aantal = $5! \cdot 2! = 240$

e eerste en laatste psychologie OF eerste en laatste economie

Kies eerst de eerste en de laatste.

aantal = $3 \cdot 2 \cdot 5! + 2 \cdot 1 \cdot 5! = 960$

f j m m x x x x OF m j j x x x x

aantal = $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4! + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4! = 1440$

Bladzijde 193

68 a aantal = $\binom{10}{3} = 120$

b aantal = $\binom{10}{9} = 10$

c aantal = $2^{10} = 1024$

d aantal = aantal van start naar Y $\times$ aantal van Y naar strand = $\binom{5}{3} \cdot 2^5 = 320$

69 a aantal = $\binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 7484400$

Alternatieve uitwerking

aantal = $\frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 7484400$

b aantal = $6^{12} = 2176782336$

- 70** a aantal = $10! = 3\,628\,800$
 b Neem de oefeningen met losse gewichten als 1 blok, dan zijn er $8!$ mogelijke volgordes.
 Voor de oefeningen met losse gewichten zijn er $3!$ mogelijke volgordes.
 aantal = $8! \cdot 3! = 241\,920$.
 c Voor de drie soorten oefeningen zijn er $3!$ volgordes.
 Binnen de vloeroefeningen zijn er $2!$ volgordes.
 Binnen de oefeningen met losse gewichten zijn er $3!$ volgordes.
 Binnen de oefeningen op apparaten zijn er $4!$ volgordes.
 aantal = $1 \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! = 1\,728$

71 a aantal = $3^{19} = 1\,162\,261\,467$

b aantal = $\binom{19}{5} = 11\,628$

c aantal = $\binom{19}{6} \cdot \binom{13}{6} = 46\,558\,512$

Alternatieve uitwerking

aantal = $\frac{19!}{6! \cdot 6! \cdot 7!} = 46\,558\,512$

d aantal = $\binom{19}{0} + \binom{19}{1} + \binom{19}{2} = 191$

- e Het eerste, middelste en laatste branden rood of groen. De overige 16 lampjes branden rood of groen of zijn uit.
 aantal = $2^3 \cdot 3^{16} = 344\,373\,768$

f aantal = $\binom{19}{5} \cdot 2^{14} = 190\,513\,152$

Bladzijde 194

72 aantal = $\binom{21}{6} \cdot \binom{15}{8} \cdot \binom{7}{4} \approx 1,2 \cdot 10^{10}$

Alternatieve uitwerking

aantal = $\frac{21!}{6! \cdot 8! \cdot 4! \cdot 3!} \approx 1,2 \cdot 10^{10}$

73 a aantal = $10^4 = 10\,000$

b aantal = $4! = 24$

- c Stel, de pincode bestaat uit de cijfers a , b en c .

Als a dubbel wordt gebruikt zijn er $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 12$ (of $\frac{4!}{2!} = 12$) mogelijkheden.

Er zijn met b en c dubbel gebruikt ook elk 12 mogelijkheden.

Dus totale aantal = $3 \cdot 12 = 36$.

$36 > 24$, dus hij heeft gelijk.

- d Stel, de pincode bestaat uit de cijfers d en e .

Als zowel d als e dubbel gebruikt worden zijn er $\binom{4}{2} = 6$ (of $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$) mogelijkheden.

Als d drie keer wordt gebruikt zijn er $\binom{4}{3} = 4$ (of $\frac{4!}{3!} = 4$) mogelijkheden en als e drie

keer wordt gebruikt ook.

Dus totale aantal = $6 + 4 + 4 = 14$.

$14 < 36$, dus met twee verschillende cijfers zijn er minder pincodes mogelijk dan met drie.

74 a aantal = $16 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 5 \approx 8,7 \cdot 10^{11}$

b aantal = $12! = 479\,001\,600$

- c Voor de eerste rij zijn er $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 4$ mogelijkheden.

Voor de tweede rij zijn dan nog er $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4$ mogelijkheden.

Voor de derde en vierde rij zijn er dan respectievelijk nog $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4$ en $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4$ mogelijkheden.

aantal = $12! \cdot 4^4 \approx 1,2 \cdot 10^{11}$

- d** De 4 socialmedia-apps kunnen op $4! = 24$ manieren worden gerangschikt.
 Er zijn 4 rijen en 4 kolommen waar deze kunnen komen, dus 8 mogelijkheden in totaal.
 Voor de overige apps zijn er nog $12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 5$ mogelijkheden.
 aantal = $4! \cdot 8 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 5 = 3\,832\,012\,800$

Diagnostische toets

Bladzijde 196

1 a

SOM

6		8	9	10	11	12
5			8	9	10	11
4				8	9	10
3					8	9
2						8
1						
	1	2	3	4	5	6

Arrows: 'a' points to the cell (2,6) containing 8; 'b' points to the cell (4,5) containing 8.

aantal = 5

- b** aantal = 10

c

PRODUCT

6	6					
5	5					
4	4	8				
3	3	6	9			
2	2	4	6	8		
1	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6

aantal = 17

- 2 a** Mogelijkheden zijn:

1 1 1
 1 1 2 1 2 1 2 1 1
 1 1 3 1 3 1 3 1 1
 1 2 2 2 1 2 2 2 1

aantal = 10

- b** Mogelijkheden zijn:

1 1 4 1 4 1 4 1 1
 1 2 3 1 3 2 2 1 3 2 3 1 3 1 2 3 2 1
 2 2 2

aantal = 10

- 3 a** aantal = $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

- b** Getal kleiner dan 50 000, dus eerste cijfer 2, 3 of 4.

aantal = $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1080$

- c** aantal = $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = 16\,807$

- d** Getal groter dan 54 000, dus eerste cijfer 5 en tweede cijfer 4, 5, 6, 7 of 8
 OF eerste cijfer 6, 7 of 8.

aantal = $1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 + 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 8918$

- 4 a** aantal = $8! = 40\,320$

- b** aantal = $6! \cdot 3! = 4320$

- c** Je kunt op $5 \cdot 4 = 20$ manieren de twee meisjesfietsen voor de buitenkant kiezen.

Daarna moeten de overige 6 fietsen geplaatst worden, dat kan op 6! manieren.

Dus aantal = $20 \cdot 6! = 14\,400$.

- d** aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$

- 5** a aantal = $\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1} = 225$
 b aantal = $\binom{5}{3} \cdot \binom{9}{1} + \binom{5}{4} = 95$
 c aantal = $\binom{11}{4} = 330$

Bladzijde 197

- 6** a aantal = $\binom{11}{6} = 462$
 b aantal = $\binom{11}{8} + \binom{11}{9} + \binom{11}{10} + \binom{11}{11} = 232$
 c aantal = $2^{11} = 2048$
- 7** a aantal = $2^{10} = 1024$
 b aantal = $\binom{10}{5} = 252$
 c Van de 7 resterende doelpunten maakt Stijn er 6 of 7.
 aantal = $\binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 8$

- 8** Van de 30 vierkantjes zijn er $0,4 \cdot 30 = 12$ blauw, 12 rood, $0,1 \cdot 30 = 3$ groen en 3 oranje.
 aantal = $\binom{30}{12} \cdot \binom{18}{12} \cdot \binom{6}{3} \approx 3,2 \cdot 10^{13}$

- 9** aantal = $3^{14} = 4\,782\,969$

- 10** a aantal = $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 302\,400$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{10!}{3! \cdot 2!} = 302\,400$$

- b aantal = $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$
 c aantal = $7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 \cdot 5 = 252$
 d aantal = $7^2 + 7^3 + 7^4 = 2793$