

5

Machtsverbanden

Wat leer je?

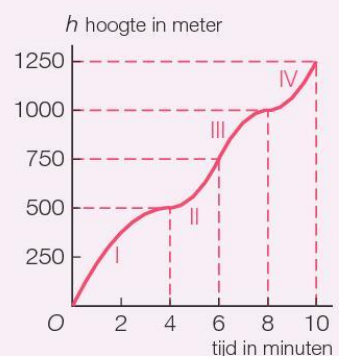
- Wat de betekenis is van machten met negatieve en gebroken exponenten.
- Verschuiven en verticaal herschalen van grafieken van machtsverbanden.
- Variabelen vrijmaken bij wortelformules, machtsformules en gebroken formules.
- Machtsverbanden gebruiken in praktische situaties.



Beginopdracht Whistler Mountain

Whistler is een stadje in het westen van Canada. Bij Whistler ligt een van de grootste skigebieden in Noord-Amerika: Whistler-Blackcomb.

De Whistler Village Gondola brengt je in 10 minuten vanuit Whistler naar een punt dat 1250 meter hoger ligt. In de figuur hiernaast is de grafiek van de hoogte van een cabine ten opzichte van Whistler uitgezet tegen de tijd. Je ziet in de grafiek vier delen die zijn aangegeven met I, II, III en IV. We nemen eerst aan dat deze delen te beschrijven zijn met tweedegraadsformules.



Voor deel I gaan we uit van een formule van de vorm $h = a(t - 4)^2 + 500$.

Dit is de formule van een parabool waarvan de top het punt (4, 500) is.

Door verder te gebruiken dat deel I door het punt (0, 0) gaat, is a te berekenen.

- Bereken a en geef de formule van deel I.

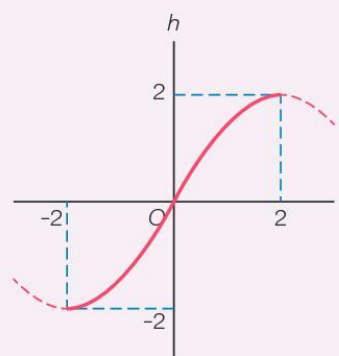
Ook voor deel II gaan we uit van de formule $h = a(t - 4)^2 + 500$. Het betreft immers ook een parabool met top (4, 500).

- Stel de formule op die bij deel II hoort, door te gebruiken dat de parabool ook door het punt (6, 750) gaat.
- Stel de formules op die horen bij de delen III en IV.

In plaats van formules van parabolen op te stellen, kun je voor het gehele stuk dat bestaat uit de delen II en III ook één derdegraadsformule opstellen.

We gaan eerst uit van de formule $h = -\frac{1}{8}t^3 + 1\frac{1}{2}t$. De grafiek hiervan op het interval $[-2, 2]$ zie je hiernaast.

Het punt van symmetrie van deze grafiek is (0, 0) en de toppen zijn (-2, -2) en (2, 2). We gaan deze grafiek zodanig bewerken dat het punt van symmetrie (6, 750) wordt en de toppen (4, 500) en (8, 1000). Dan heb je het gedeelte van de grafiek dat is aangegeven met II en III.



We gaan de grafiek eerst uittrekken in verticale richting door elke h -waarde te vermenigvuldigen met een getal. We kiezen hiervoor de factor 125 en krijgen zo de formule $h = 125\left(-\frac{1}{8}t^3 + 1\frac{1}{2}t\right)$.

- Licht toe waarom is gekozen voor de factor 125 en toon aan dat de formule te herleiden is tot $h = -15,625t^3 + 187,5t$.

Vervolgens verschuiven we de grafiek van $h = -15,625t^3 + 187,5t$ over een afstand 6 naar rechts en 750 omhoog. Zo ontstaat de formule $h = -15,625(t - 6)^3 + 187,5(t - 6) + 750$.

- Licht de verschuiving 6 naar rechts en 750 omhoog toe en controleer met de GR of de grafiek bij deze formule past bij de delen II en III.

Voorkennis Herleiden van machten

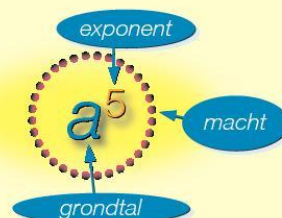
Theorie A Rekenregels voor machten

Je weet dat a^5 een macht van a is.

In de macht a^5 is a het grondtal en 5 de exponent.

a^5 is een korte schrijfwijze voor $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, dus voor het product van vijf factoren a .

Rekenen met machten gaat als volgt.



$a^2 \cdot a^5 = \underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ factoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5 \text{ factoren}} = a^7$	Bij het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten bij elkaar op.
$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^3$	Bij het delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af.
$(a^2)^5 = \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{5 \text{ factoren } a^2} = a^{10}$	Bij de macht van een macht vermenigvuldig je de exponenten met elkaar.
$(ab)^4 = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab}_{4 \text{ factoren } ab} = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = a^4 b^4$	Bij de macht van een product krijg je een product van machten.

Zo krijg je de volgende rekenregels voor machten.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

Hieronder zie je hoe je de rekenregels gebruikt bij het herleiden.

$$(-3a^3)^4 = (-3)^4 \cdot (a^3)^4 = 81a^{12}$$

$$(-3a^2)^3 = (-3)^3 \cdot (a^2)^3 = -27a^6$$

$$(2a^3)^2 - (a^2)^3 = 4a^6 - a^6 = 3a^6$$

$$a^3 \cdot a^2 + a^3 + a^2 = a^5 + a^3 + a^2 \quad \leftarrow \dots\dots\dots$$

$$\frac{3a^3b}{12ab} = \frac{1}{4}a^2$$

Let op: $a^3 \cdot a^2 = a^5$ maar $a^3 + a^2$ kan niet korter.

$$\begin{aligned} (-2)^4 &= 16 \text{ en } -2^4 = -16 \\ (-3)^3 &= -27 \text{ en } -3^3 = -27 \end{aligned}$$

1 Herleid.

a $x^2 \cdot x^3$

b $2p^3 \cdot 3p^2$

c $4a^2b \cdot 5a^3b^2$

d $-2p^4q^3 \cdot -3pq$

e $5x^2y \cdot 2x - 3x^3y$

f $12a^4b \cdot \frac{1}{4}ab - 8ab$

2 Herleid.

a $(p^2q)^3$

b $(3x^2)^3$

c $(-5x^2y^3)^2$

d $(-4ab^4)^2$

e $(3a)^2 \cdot (2a^2)^3$

f $(3a^3)^2 + (2a^2)^3$

3 Herleid.

a $\frac{12x^6}{4x^2}$

b $\frac{5x^{10}}{15x^5}$

c $\frac{24a^4b^2}{6ab}$

d $\frac{-15p^6q}{5p^2q}$

e $\frac{10x^3y^2}{5x^2y}$

f $\frac{(2ab)^3}{(3ab)^2}$

4 Herleid.

a $\frac{-28a^6}{7a}$

b $-(3a^4)^2$

c $(-2a^2)^5$

d $(-a^3)^3$

e $(5a)^3 \cdot -3a$

f $\left(\frac{9a^4}{a}\right)^2$

5 Herleid.

a $(ab)^4 \cdot a$

b $(-2ab)^3 \cdot b$

c $(3a)^2 + (2b)^2$

d $(3a)^3 - 8a^3$

e $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (-a)^2$

f $(5a^4)^2 + (-a^2)^4$

5.1 Rekenen met machten



De formule $A = (3xy)^2 - \frac{6x^3y^4}{2xy^2}$ is te herleiden tot $A = 6x^2y^2$.
Laat zien hoe dat gaat.

Theorie A Formules met machten herleiden

Je kent de volgende rekenregels voor machten.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (a^p)^q = a^{pq} \quad (ab)^p = a^p b^p$$

Deze rekenregels kun je gebruiken om formules met machten te herleiden.

Voorbeeld

a Herleid de formule $P = (2a^3)^2 - (a^2)^3 + a^3 \cdot a^2$.

b Herleid de formule $Q = \frac{12x^3y}{3xy} + \frac{(4xy)^2}{2y^2}$.

Uitwerking

a $P = (2a^3)^2 - (a^2)^3 + a^3 \cdot a^2 = 4a^6 - a^6 + a^5 = 3a^6 + a^5$

Let op: $3a^6 + a^5$ kan niet korter.

b $Q = \frac{12x^3y}{3xy} + \frac{(4xy)^2}{2y^2} = 4x^2 + \frac{16x^2y^2}{2y^2} = 4x^2 + 8x^2 = 12x^2$



Geef aan welke rekenregels voor machten worden gebruikt bij het herleiden van de twee formules van het voorbeeld.



Herleid de volgende formules.

a $A = (4x^3)^2 - 3x^5 \cdot 2x$

b $B = \frac{15a^3b}{5ab} - \left(1\frac{1}{2}a\right)^2$

c $C = 3p^2q \cdot 4pq - \frac{(6p^2q^2)^2}{9pq^2}$

A4

Herleid de volgende formules.



a $P = 6a^2 \cdot 4a^3 - 5a^4 \cdot 3a - (2a^2)^3$

b $Q = \frac{28x^6}{7x} - \frac{(3x^2y)^3}{2xy^3}$

c $R = (3p^2q)^2 - \frac{2p^5q^3}{pq} + (2p^2)^2 - (3q)^2$

E5Het getal $2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53}$ eindigt op een aantal nullen.

Wat is het laatste cijfer vóór al deze nullen?

O6

In de tabel hiernaast kun je zowel in de exponenten als in de getallen rechts van het =-teken een regelmaat herkennen.

a Hoe volgt uit deze regelmaat dat $2^0 = 1$ en $2^{-2} = \frac{1}{4}$?**b** Vul in: $2^{-3} = \frac{1}{2^{\dots}}$ en $2^{-4} = \frac{1}{2^{\dots}}$.Op dezelfde manier als hierboven kun je inzien dat $3^0 = 1$ en $3^{-2} = \frac{1}{9}$.**c** Vul in: $x^{-1} = \frac{1}{\dots}$ en $x^{-3} = \frac{1}{\dots}$.

$2^5 = 32$
$2^4 = 16$
$2^3 = 8$
$2^2 = 4$
$2^1 = \dots$
$2^0 = \dots$
$2^{-1} = \dots$
$2^{-2} = \dots$
$2^{-3} = \dots$

Theorie B Machten met negatieve exponenten

In opgave 6 komen de machten 2^0 , x^{-1} en x^{-3} voor.Om de betekenis van x^0 te begrijpen, kijken we naar $\frac{x^2}{x^2}$.Je weet $\frac{x^2}{x^2} = 1$.Gebruik je de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, dan krijg je $\frac{x^2}{x^2} = x^{2-2} = x^0$.De afspraak is dat $x^0 = 1$.

$$x^0 = 1$$

Om de betekenis van x^{-3} te begrijpen, kijken we naar $\frac{x^2}{x^5}$.Je weet $\frac{x^2}{x^5} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^3}$.Gebruik je de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, dan krijg je $\frac{x^2}{x^5} = x^{2-5} = x^{-3}$.De afspraak is dat $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$. En zo is $x^{-6} = \frac{1}{x^6}$ en $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\frac{1}{5} = 5^{-1}$$

Voor $a \neq 0$ is $a^0 = 1$ en $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.Met de regels voor machten kun je $\frac{a^4}{a^7}$ schrijven als macht van a .Je berekent dan de exponent die bij het grondtal a hoort.Je krijgt $\frac{a^4}{a^7} = a^{4-7} = a^{-3}$.

Voorbeeld

Schrijf als macht van a .

a $a^2 \cdot \frac{1}{a^8}$

b $\frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)}{a}$

c $\frac{1}{a^p} \cdot (a^3)^2$

d $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a^{-n}}$

Uitwerking

a $a^2 \cdot \frac{1}{a^8} = a^2 \cdot a^{-8} = a^{-6}$

b $\frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)}{a} = \frac{a^{-2}}{a^1} = a^{-3}$

c $\frac{1}{a^p} \cdot (a^3)^2 = a^{-p} \cdot a^6 = a^{-p+6}$

d $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a^{-n}} = \frac{a^{-5}}{a^{-n}} = a^{-5-(-n)} = a^{-5+n}$

Je schrijft $5a^{-3}b^2$ als volgt zonder negatieve exponenten.

$$5a^{-3}b^2 = 5 \cdot \frac{1}{a^3} \cdot b^2 = \frac{5b^2}{a^3}$$

Je ziet dat dit antwoord als één breuk geschreven is. Doe dit ook bij vergelijkbare opgaven.

Voorbeeld

Schrijf zonder negatieve exponenten.

a $8a^{-5}b^3$

b $\frac{2}{5}a^{-2}b$

c $\left(\frac{3}{4}a^3b^{-2}\right)^{-2}$

Uitwerking

a $8a^{-5}b^3 = 8 \cdot \frac{1}{a^5} \cdot b^3 = \frac{8b^3}{a^5}$

Deze tussenstap mag je weglaten.

b $\frac{2}{5}a^{-2}b = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot b = \frac{2b}{5a^2}$

c $\left(\frac{3}{4}a^3b^{-2}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot (a^3)^{-2} \cdot (b^{-2})^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} \cdot a^{-6} \cdot b^4 = \frac{1}{\frac{9}{16}} \cdot \frac{1}{a^6} \cdot b^4 = \frac{16b^4}{9a^6}$

7 Schrijf als macht van a .



a $\frac{1}{a^2}$

d $\frac{a^8}{a^0}$

g $\frac{a}{a^{12}}$

b $a^4 \cdot \frac{1}{a^6}$

e $(a^3)^{-2}$

h $\frac{1}{a^8} \cdot (a^3)^n$

c $\frac{a^n}{\left(\frac{1}{a^4}\right)}$

f $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a}$

i $\frac{\left(\frac{1}{a^n}\right)}{a^{-3}}$

8 Schrijf zonder negatieve exponenten.



a $6a^{-5}b^3$

d $\frac{3}{5}a^{-4}$

g $-4 \cdot (3a)^{-2}$

b $\frac{1}{3}a^{-3}$

e $\left(\frac{1}{2}a\right)^{-3}$

h $(3a)^{-2}b^{-3}$

c $(5a^{-4}b^2)^{-1}$

f $\frac{1}{6}a^{-2}b^4$

i $\left(\frac{3}{8}a^{-1}b\right)^{-2}$

A9



a Schrijf $\frac{a^4 \cdot a^6}{\left(\frac{1}{a}\right)}$ als macht van a .

b Schrijf $\left(\frac{2}{3}a^{-4}b^3\right)^{-3}$ zonder negatieve exponenten.

c Toon aan dat $4a^{-2}b + \frac{3}{a^2b^{-1}}$ gelijk is aan $\frac{7b}{a^2}$.

A10



Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^n$.

a $y = 5(2x^3)^2 \cdot \frac{3}{x^4}$

c $y = \frac{162}{(3x^2)^4}$

b $y = \frac{1}{3}(3x^2)^3 \cdot \frac{2}{x^{10}}$

d $y = \left(\frac{4}{5}x\right)^{-2} \cdot \frac{4}{x}$

E11



a Als je 1, 2, 3, ... tot en met n met elkaar vermenigvuldigt, is de uitkomst $2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$.

Welk getal is n ?

b Harry schrijft een rij getallen op. Hij begint met 1 en het tweede getal is 2. Elk getal daarna maakt hij als volgt: hij deelt het voorlaatst opgeschreven getal door het laatst opgeschreven getal.

Schrijf het tiende getal als macht van 2.

O12



Je weet dat $(\sqrt{x})^2 = x$.

a Er geldt $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x$. Uit welke rekenregel volgt dit?

b Licht toe dat $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

c Licht toe dat $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Theorie C Hogeremachtswortels

Worteltrekken heeft te maken met kwadrateren. Zo heeft de vergelijking $x^2 = 5$ de oplossingen $x = \sqrt{5}$ en $x = -\sqrt{5}$. Dus $(\sqrt{5})^2 = 5$ en $(-\sqrt{5})^2 = 5$.

Omdat kwadrateren hetzelfde is als tot de tweede macht verheffen, heet $\sqrt{5}$ ook wel de *tweedemachtswortel* van 5.

Er zijn ook **hogeremachtswortels**, zoals *derdemachtswortels*, *vierdemachtswortels*, enzovoort.

Een derdemachtswortel heeft te maken met een derde macht.

Zo heeft de vergelijking $x^3 = 50$ als oplossing $x = \sqrt[3]{50}$. Dus $(\sqrt[3]{50})^3 = 50$.

En de oplossing van $x^3 = -50$ is $x = \sqrt[3]{-50}$. Dus $(\sqrt[3]{-50})^3 = -50$.

$\sqrt{a}$ is een korte schrijfwijze voor $\sqrt[2]{a}$.

In opgave 12 heb je gezien dat $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

Met behulp van de regel $(a^p)^q = a^{pq}$ lichten we de betekenis van $x^{\frac{1}{5}}$ toe.

Je kiest daartoe $p = \frac{1}{5}$ en $q = 5$.

Je krijgt $(x^{\frac{1}{5}})^5 = x^1 = x$.
Je weet $(\sqrt[5]{x})^5 = x$.
De afspraak is dat $x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$.

Algemeen is $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$. En verder is $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ en $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Machten met een gebroken exponent kun je dus herleiden tot een hogeremachtswortel.

Zo is $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$, $a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ en $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$.

De rekenregels voor machten van bladzijde 11 gelden ook voor machten met gebroken exponenten.

Bijzondere machten

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^0 = 1$$

Voorbeeld

Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

a $4a^{-\frac{1}{3}}$

b $4a^{2\frac{1}{2}}$

c $\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}$

Uitwerking

a $4a^{-\frac{1}{3}} = \frac{4}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{4}{\sqrt[3]{a}}$

b $4a^{2\frac{1}{2}} = 4a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 4a^2 \cdot \sqrt{a}$

c $\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{4b^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{a}}{4 \cdot \sqrt[3]{b^2}}$

Omgekeerd kun je een vorm met hogere machtswortels herleiden tot een vorm met een gebroken exponent. Zie het volgende voorbeeld.

Voorbeeld

Schrijf als macht van x .

a $x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

b $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

c $\frac{x^{1,25}}{x^{2,20}}$

Uitwerking

a $x \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^1 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{1\frac{2}{3}}$

b $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{1\frac{2}{3}}$

c $\frac{x^{1,25}}{x^{2,20}} = x^{-0,95}$

13

Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

a $5a^{\frac{3}{3}}$

d $\frac{2}{3}a^{-3}b^{\frac{1}{2}}$

b $\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{4}}b$

e $\frac{1}{5}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$

c $3a^{-\frac{2}{3}}$

f $(5a)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\frac{3}{5}a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{7}}}{5a^{\frac{1}{3}}} = \frac{3b^{\frac{2}{7}}}{5a^{\frac{1}{3}}} = \frac{3 \cdot \sqrt[7]{b^2}}{5 \cdot \sqrt[3]{a}}$$

14

Schrijf als macht van a .

a $a \cdot \sqrt[3]{a}$

d $\frac{1}{a^3}$

g $\sqrt[3]{a^{12}}$

b $\frac{1}{\sqrt{a}}$

e $a^2 \cdot \sqrt{a}$

h $\frac{1}{a^4} \cdot \sqrt[3]{a}$

c $\frac{1}{a}$

f $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$

i $\frac{a^3}{\sqrt[3]{a}}$

15

Je kunt $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ als macht van 2 schrijven: $\frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-1\frac{1}{2}}$.

Schrijf als macht van 2, 3 of 10.

a $8\sqrt{2}$

c $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

e $\frac{1}{100}\sqrt{10}$

b $\frac{8}{\sqrt{2}}$

d $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$

f $\frac{10}{\sqrt[3]{0,1}}$

16

a Toon aan dat de formule $y = 2^{x+4}$ te herleiden is tot $y = 16 \cdot 2^x$.

b Herleid de formule $y = 2^{x-2}$ tot de vorm $y = a \cdot 2^x$.

c Herleid de formule $y = 3^{x-1}$ tot de vorm $y = a \cdot 3^x$.

A17 Schrijf de volgende formules zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

a $N = 5p^{\frac{2}{3}} \cdot q^{-\frac{1}{3}}$

b $R = 100a^{-4} \cdot b^{2\frac{1}{2}}$

c $P = 9^{1\frac{1}{2}} \cdot x^{-1\frac{1}{2}} \cdot y^{1\frac{1}{3}}$

A18 Schrijf als macht van x .

a $\frac{x^6}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

d $x^4 \cdot \sqrt{x}$

b $x \cdot \sqrt[7]{x^3}$

e $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

c $\frac{x}{\sqrt[5]{x}}$

f $x^2 \cdot \frac{1}{x^3}$

A19 Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^p$.

a $y = \frac{5}{x\sqrt{x}}$

d $y = 3 \cdot \sqrt[4]{x^3}$

b $y = 5x\sqrt{x^3}$

e $y = 5x^{-0,2} \cdot x^{1,3}$

c $y = \frac{5}{x^3} \cdot 2\sqrt{x}$

f $y = \frac{50x^{1,9}}{10x^{1,1}}$

Terugblik

Machten met negatieve exponenten

De rekenregels voor machten die hiernaast staan, gelden ook voor negatieve exponenten.

Dus $a^3 \cdot a^{-5} = a^{-2}$, $\frac{a^3}{a^5} = a^{-2}$, $(a^{-2})^3 = a^{-6}$ en $(ab)^{-2} = a^{-2}b^{-2}$.

Verder geldt voor $a \neq 0$ dat $a^0 = 1$ en $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

De regel $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ gebruik je bij het schrijven van $\frac{5}{6}a^{-3}b^2$ zonder negatieve exponenten. Je krijgt $\frac{5}{6}a^{-3}b^2 = \frac{5b^2}{6a^3}$.

Bij het herleiden van de formule $y = \frac{144x^3}{(2x)^5}$ tot de vorm $y = ax^n$

krijg je $y = \frac{144x^3}{(2x)^5} = \frac{144x^3}{32x^5} = \frac{144}{32} \cdot x^{3-5} = 4\frac{1}{2}x^{-2}$, dus $y = 4\frac{1}{2}x^{-2}$.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

Machten met gebroken exponenten

De rekenregels voor machten met gebroken exponenten zijn

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} \text{ en } a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Dus $(2x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2x}$ en $(4x)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(4x)^2} = \sqrt[3]{16x^2}$.

Je hebt hier te maken met de derdemachtswortels $\sqrt[3]{2x}$ en $\sqrt[3]{16x^2}$.

Met de regels $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ en $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ kun je $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{4}{5}}$ zonder negatieve en gebroken exponenten schrijven.

$$\text{Je krijgt } \frac{2}{3}a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{4}{5}} = \frac{2a^{\frac{1}{4}}}{3b^{\frac{4}{5}}} = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{a}}{3 \cdot \sqrt[5]{a^4}}.$$

In teller en noemer staan hogere machtswortels, namelijk in de teller een vierdemachtswortel en in de noemer een vijfdemachtswortel.

Met de regels is $\frac{x^2}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}$ te schrijven als macht van x .

$$\text{Je krijgt } \frac{x^2}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{x^2}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^2}{x^{3\frac{1}{4}}} = x^{2-3\frac{1}{4}} = x^{-1\frac{1}{4}}.$$

Bij het schrijven van de formule $K = 10x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{1\frac{1}{4}}$ zonder negatieve en zonder gebroken exponenten krijg je

$$K = 10x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{1\frac{1}{4}} = 10 \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \cdot y^1 \cdot y^{\frac{1}{4}} = \frac{10y \cdot \sqrt[4]{y}}{\sqrt[3]{x^2}}, \text{ dus } K = \frac{10y \cdot \sqrt[4]{y}}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

5.2 Grafieken veranderen

020
□ ⊗ *

Gegeven zijn de formules $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$, $y_3 = x^6$ en $y_4 = x^9$.

- Plot de grafieken van y_1 , y_2 , y_3 en y_4 .
Neem x tussen $-1,5$ en $1,5$ en y tussen -2 en 2 .
- Er zijn twee punten die op elk van deze grafieken liggen.
Schrijf de coördinaten van die punten op.
- Van welke grafieken ligt geen enkel punt onder de x -as?

021
□ ⊗ *

Gegeven zijn de formules $y_1 = 2x^3$ en $y_2 = 2x^3 + 5$.

- Bereken y_1 en y_2 voor $x = 1$, $x = 2$ en $x = 3$.
Hoe volgen de uitkomsten van y_2 uit die van y_1 ?
- Plot de grafieken van y_1 en y_2 . Neem x tussen -2 en 2 en y tussen -10 en 10 .
Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van y_1 ?

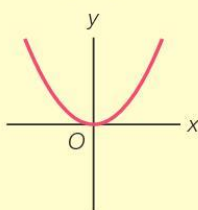
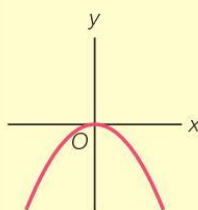
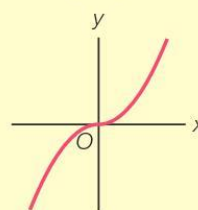
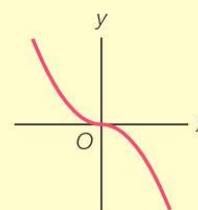
022
□ ⊗ *

Gegeven zijn de formules $y_1 = 2x^3$ en $y_2 = 2(x - 2)^3$.

- Bereken y_1 voor $x = 3$ en y_2 voor $x = 5$.
Licht toe waarom de uitkomsten hetzelfde zijn.
- Welke x moet je invullen in de formule $y_3 = 2(x - 5)^3$ om dezelfde uitkomst als bij vraag a te krijgen?

Theorie A Verschuivingen

Een formule van de vorm $y = ax^n$ hoort bij een **machtsverband**. In het schema hieronder zie je hoe de grafiek eruitziet voor $n > 1$ en n geheel.

n even		n oneven	
$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
			
$(0, 0)$ is de top		$(0, 0)$ is het punt van symmetrie	

De formules van de vorm $y = ax^n$ zijn **standaardformules** en de bijbehorende grafieken zijn **standaardgrafieken**.

Je mag standaardgrafieken zonder toelichting schetsen.

Een standaardgrafiek kun je verschuiven. Zo ontstaat een **beeldgrafiek**.

Bij de verschuiving 3 omhoog is de beeldgrafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ de parabool met formule $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

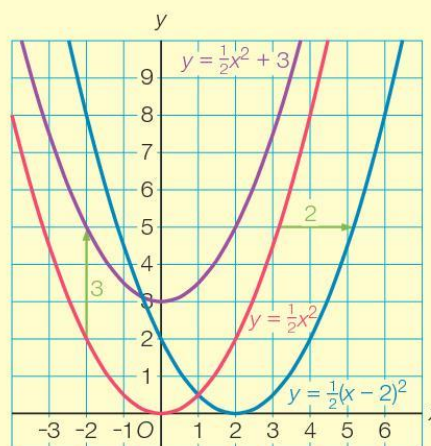
Bij de verschuiving 2 naar rechts heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ als beeldfiguur de parabool

$$y = \frac{1}{2}(x - 2)^2.$$

En bij de verschuiving 3 naar links heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ als beeldfiguur de parabool

$$y = \frac{1}{2}(x + 3)^2.$$

De verschuiving 3 naar rechts en 5 omhoog noteren we als verschuiving (3, 5).



figuur 5.1

Afspraak

De verschuiving p naar rechts en q omhoog noteren we als verschuiving (p, q) .

De parabool $y = -3x^2$ heeft bij de verschuiving

- (5, 0) als beeldgrafiek de parabool $y = -3(x - 5)^2$
- (-6, 0) als beeldgrafiek de parabool $y = -3(x + 6)^2$
- (-6, -5) als beeldgrafiek de parabool $y = -3(x + 6)^2 - 5$.

Verder is

$$y = 5x^3 \xrightarrow{\text{verschuiving (4, 7)}} y = 5(x - 4)^3 + 7$$

$$y = -6x^4 \xrightarrow{\text{verschuiving (-3, 8)}} y = -6(x + 3)^4 + 8$$

$$y = -x^2 \xrightarrow{\text{verschuiving (-5, 0)}} y = -(x + 5)^2$$

2 naar rechts:

vervang x door $x - 2$

3 naar links:

vervang x door $x + 3$

Bij de verschuiving (-6, -5)

- verschuif je 6 naar links en 5 omlaag
- vervang je x door $x - 6$, dus door $x + 6$, en tel je er -5 bij op.

grafiek

beeldgrafiek

$$y = ax^n \xrightarrow{\text{verschuiving (p, q)}} y = a(x - p)^n + q$$

Pas je op de grafiek van $y = 3(x - 1)^2 + 5$ de verschuiving (8, 6) toe, dan krijg je

$$y = 3(x - 1)^2 + 5 \xrightarrow{\text{verschuiving (8, 6)}} y = 3(x - 8 - 1)^2 + 5 + 6, \text{ dus } y = 3(x - 9)^2 + 11.$$

23



a Schrijf de formule op van de beeldgrafiek van de parabool $y = -5x^2$ bij de verschuiving (2, 5), bij de verschuiving (-3, 6) en bij de verschuiving (7, 0).

b Schrijf de formule op van de beeldgrafiek van de grafiek van $y = 4x^5$ bij de verschuiving (-5, 7) en bij de verschuiving (0, -10).

24



Stel de formule op van de beeldgrafiek bij de verschuiving (4, 6).

- a $y = 5x^2 + 1$
- b $y = (x - 6)^3$
- c $y = -x^4 + 2$
- d $y = 3(x - 5)^6 + 8$
- e $y = -2(x + 4)^5 + 6$
- f $y = -2(x - 4)^2 - 6$

A25



Hieronder is telkens een formule en een verschuiving gegeven.

Stel de formule op van de beeldgrafiek.

- a $y = 5x^6$ en verschuiving (8, -3)
- b $y = -3x^4 + 6$ en verschuiving (-4, 0)
- c $y = 2(x - 3)^2$ en verschuiving (5, 0)
- d $y = -5(x - 1)^3 + 8$ en verschuiving (2, -7)
- e $y = x^5 + 6$ en verschuiving (-8, -3)
- f $y = -x^4$ en verschuiving (7, -8)

A26



De grafiek van $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 - 5$ wordt 2 naar rechts en q omhoog verschoven. Zo ontstaat de grafiek van $y = -\frac{1}{2}x^2 - x$.
Bereken q .

O27



De grafiek van $y = 2x^2$ wordt 4 naar links en 1 omhoog verschoven.

- a Licht toe dat de top van de beeldgrafiek het punt (-4, 1) is.
- b Geef de formule van de beeldgrafiek. Hoe kun je de coördinaten van de top van de beeldgrafiek uit de formule aflezen?

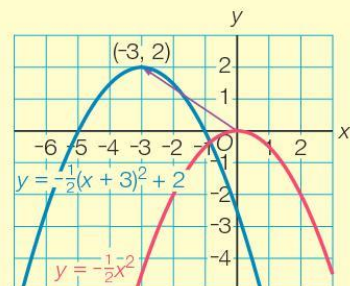
Theorie B Toppen en punten van symmetrie

De top van de grafiek van $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$ vind je als volgt.

$$y = -\frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{verschuiving } (-3, 2)} y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$$

bergparabool
met top $O(0, 0)$

bergparabool
met top $(-3, 2)$



figuur 5.2

De grafiek van $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$ is een bergparabool met top $(-3, 2)$.

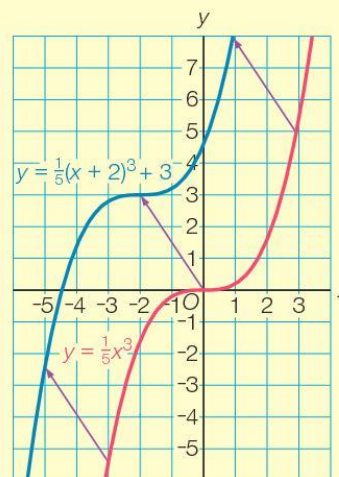
Omdat 2 de grootste y -waarde is, zeggen we dat het **maximum** van y gelijk is aan 2.

En zo is de grafiek van $y = \frac{1}{4}(x + 5)^2 - 3$ een dalparabool met top $(-5, -3)$.

Omdat -3 de kleinste y -waarde is, zeggen we dat het **minimum** van y gelijk is aan -3.

De grafiek van $y = \frac{1}{5}(x+2)^3 + 3$ ontstaat uit die van $y = \frac{1}{5}x^3$ bij de verschuiving $(-2, 3)$.

De grafiek van $y = \frac{1}{5}(x+2)^3 + 3$ heeft geen top.
Het punt $(-2, 3)$ is het **punt van symmetrie**.



figuur 5.3

Voorbeeld

Schets de grafieken van de volgende formules en vermeld in je schets de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

a $y = \frac{1}{5}(x-5)^2 - 4$

b $y = -3(x+2)^5 - 6$

Aanpak

a $y = \frac{1}{5}x^2$

↓ verschuiving $(5, -4)$

$y = \frac{1}{5}(x-5)^2 - 4$

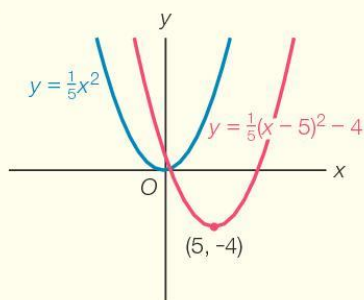
b $y = -3x^5$

↓ verschuiving $(-2, -6)$

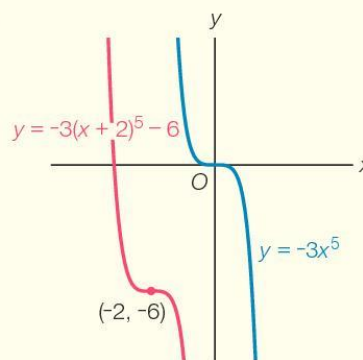
$y = -3(x+2)^5 - 6$

Uitwerking

a



b



28

Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld in je schets de coördinaten van de top.

a $y = -2(x+2)^2 - 3$

c $y = \frac{1}{2}(x+2)^4 + 18$

b $y = 0,18(x-3)^2 - 4$

d $y = -(x-3)^8 - 10$

29

Zie de formules bij opgave 28.

Geef bij elke formule aan of je met een minimum of maximum te maken hebt en geef dit minimum of maximum.

30 Geef van de grafieken van de volgende formules de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

- a** $y = -3(x - 5)^2 + 8$ **d** $y = 6(x - 8)^3 + 12$
b $y = 5x^2 + 7$ **e** $y = -\frac{1}{2}(x - 100)^4$
c $y = \frac{2}{5}(x + 8)^2$ **f** $y = -0,4(x + 0,15)^6 - 0,3$

A31 Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld in je schets de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

- a** $y = \frac{1}{2}(x - 3)^3 - 2$ **c** $y = -0,2(x + 2)^5 + 1$
b $y = -\frac{1}{3}(x + 1)^2 - 4$ **d** $y = 2(x - 5)^4 - 3$

A32 Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld in je schets de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

- a** $N = 3(t^4 - 2) + 5$ **c** $K = 8(q + 6)^5 - 12$
b $M = -5(p + 3)^6 + 2$ **d** $S = -8(t - 1)^3$

A33 Bij de formule van $A = a(t - 2)^4 + b$ is het maximum gelijk aan 10. De grafiek van A gaat door het punt (4, 2). Bereken a en b .

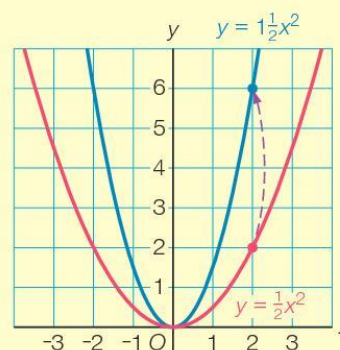
A34 De grafiek van $y = x^2 - 10x + 26$ is ontstaan uit de grafiek van $y = x^2 - 2x + 4$ bij een verschuiving. Onderzoek welke verschuiving.

O35 **a** Bereken $y = (x - 2)^4$ voor $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.
b Bereken $y = 3(x - 2)^4$ voor $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.
c Wat is het verband tussen de uitkomsten bij a en b?

Theorie C Verticaal herschalen

In figuur 5.4 is de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ ontstaan uit de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ door elke y -waarde met 3 te vermenigvuldigen. Zo ligt het punt (2, 2) op de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ en het beeldpunt (2, 6) op de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$. Je ziet dat de y -coördinaat 3 keer zo groot is geworden.

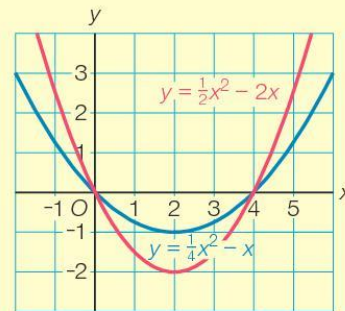
Er is hier sprake van **herschaling in verticale richting** met factor 3. De grafiek is als het ware uitgerekt in verticale richting.



figuur 5.4

Bij herschaling in verticale richting met factor $\frac{1}{2}$ heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ als beeldfiguur de grafiek van $y = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 - 2x)$, dus van $y = \frac{1}{4}x^2 - x$. Zie figuur 5.5.

Je ziet dat de beeldgrafiek hier ontstaat door de oorspronkelijke grafiek in te drukken in plaats van uit te rekken. Dit gebeurt als de factor waarmee herschaald wordt tussen 0 en 1 ligt.



figuur 5.5

Voorbeeld

Op de grafiek van $y = \frac{1}{4}x^2$ wordt eerst de verschuiving $(2, -3)$ toegepast en vervolgens de herschaling in verticale richting met factor 2.

Stel de formule op van de beeldgrafiek en vermeld de coördinaten van de top.

Uitwerking

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

↓ verschuiving $(2, -3)$

$$y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 3$$

↓ vert. herschaling factor 2

$$y = 2\left(\frac{1}{4}(x - 2)^2 - 3\right) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 6$$

De formule van de beeldgrafiek is $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 6$.

De top is $(2, -6)$.

R36
☐ ⊗ *

- a Welke herschaling in verticale richting komt op hetzelfde neer als spiegeling in de x -as?
- b Stel de formule op van de beeldgrafiek van $y = 3(x - 1)^2 - 6$ bij spiegeling in de x -as.



37
☐

- a Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}(x + 1)^3$. De grafiek van y wordt herschaald in verticale richting met factor 5. Stel de formule op van de beeldgrafiek.
- b Gegeven is de formule $y = 0,6(x - 2)^6 - 4$. De grafiek van y wordt herschaald in verticale richting met factor $\frac{1}{4}$. Stel de formule op van de beeldgrafiek.

38

- a** De grafiek van y_2 ontstaat uit de grafiek van $y_1 = 0,3x^2$ bij de verschuiving $(-5, 6)$. Verder geldt $y_3 = 3 \cdot y_2$.
Stel de formule op van y_3 en geef de top van de bijbehorende grafiek.
- b** Gegeven zijn de formules $y_1 = 0,5x^4$ en $y_2 = -4 \cdot y_1$.
De grafiek van y_3 ontstaat uit de grafiek van y_2 bij de verschuiving $(-3, 5)$.
Stel de formule op van y_3 en geef de top van de bijbehorende grafiek.
- c** De grafiek van y_2 ontstaat uit de grafiek van $y_1 = -3x^5 + 4$ bij de verschuiving $(2, -7)$. Verder geldt $y_3 = 6 \cdot y_2$.
Stel de formule op van y_3 en geef de coördinaten van het punt van symmetrie van de bijbehorende grafiek.

A39

- a** Op de grafiek van $y = -0,12x^2$ wordt eerst de verschuiving $(4, 5)$ toegepast en vervolgens de herschaling in verticale richting met factor 4.
Stel de formule op van de beeldgrafiek en vermeld de coördinaten van de top.
- b** Op de grafiek van $y = 3(x - 4)^2 - 8$ wordt eerst de verschuiving $(-5, 2)$ toegepast en vervolgens de herschaling in verticale richting met factor -4 .
Stel de formule op van de beeldgrafiek en vermeld de coördinaten van de top.
- c** De grafiek van $y = -1\frac{1}{2}(x + 3)^3 + 8$ wordt eerst herschaald in verticale richting met factor 2. Vervolgens wordt de verschuiving $(8, 20)$ toegepast.
Stel de formule op van de beeldgrafiek en vermeld de coördinaten van het punt van symmetrie.

A40

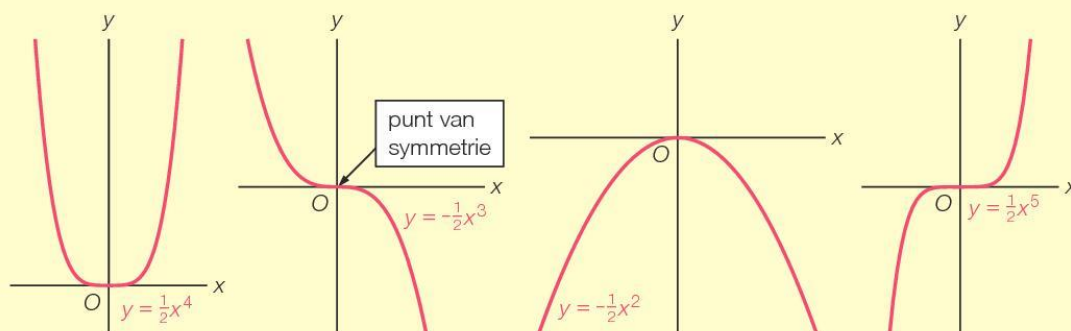
- Gegeven zijn de formules $y_1 = 0,1x^3$, $y_2 = 4 \cdot y_1$ en $y_3 = \frac{1}{5} \cdot y_2$.
***** De grafiek van y_4 ontstaat uit de grafiek van y_3 door de verschuiving $(6, p)$.
De grafiek van y_4 gaat door de oorsprong.
Bereken p .

Terugblik

Machtsverbanden

Een formule van de vorm $y = ax^n$ hoort bij een machtsverband.

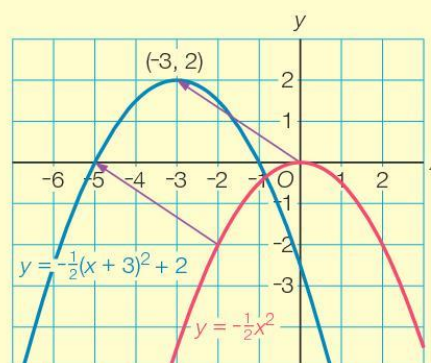
De bijbehorende grafieken zijn standaardgrafieken. Je mag standaardgrafieken zonder toelichting schetsen.



De verschuiving (p, q)

De verschuiving (p, q) is de verschuiving p naar rechts en q omhoog. Bij de verschuiving (p, q) heeft de grafiek van $y = ax^n$ als beeldgrafiek $y = a(x - p)^n + q$.

Zo ontstaat de grafiek van $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$ uit de parabool $y = -\frac{1}{2}x^2$ bij de verschuiving (-3, 2). De top van de grafiek van $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$ is het punt (-3, 2), dus het maximum is 2.



Herschaling in verticale richting

Bij herschaling in verticale richting met factor $\frac{1}{2}$ heeft de grafiek van $y = 2x^2 - 3$ als beeldfiguur de grafiek van $y = \frac{1}{2}(2x^2 - 3)$, dus van $y = x^2 - 1\frac{1}{2}$.

Op de grafiek van $y = 0,12x^4$ wordt eerst de verschuiving (5, -6) toegepast en vervolgens de herschaling in verticale richting met factor 4.

Je krijgt $y = 0,12x^4$

↓ verschuiving (5, -6)

$$y = 0,12(x - 5)^4 - 6$$

↓ vert. herschaling factor 4

$$y = 4(0,12(x - 5)^4 - 6) = 0,48(x - 5)^4 - 24$$

De formule van de beeldgrafiek is $y = 0,48(x - 5)^4 - 24$.

Van de beeldgrafiek is de top (5, -24).

5.3 Formules herleiden en variabelen vrijmaken

O41
□ ⊗ *

- a** De formule $y = \sqrt{16x}$ is te schrijven in de vorm $y = a\sqrt{x}$. Welk getal is a ?
- b** De formule $y = \sqrt[3]{27x}$ is te schrijven in de vorm $y = b \cdot \sqrt[3]{x}$. Welk getal is b ?

Theorie A Wortelformules herleiden

Met de regel $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$ is de formule $y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{xy}$ te schrijven als $y = \sqrt{2xy}$.

Omgekeerd is de formule $y = \sqrt{9x}$ te schrijven als $y = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x}$ oftewel als $y = 3\sqrt{x}$. Je gebruikt dan dat $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.

Op dezelfde manier geldt de regel $\sqrt[n]{A \cdot B} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$.

Voorbeeld

- a** Schrijf de formule $A = \sqrt[3]{-343xy}$ in de vorm $A = c \cdot \sqrt[3]{xy}$.
- b** Schrijf de formule $B = 2 \cdot \sqrt[4]{50p} + \sqrt[4]{60p}$ in de vorm $B = c \cdot \sqrt[4]{p}$. Rond c af op twee decimalen.

Uitwerking

a $A = \sqrt[3]{-343xy} = \sqrt[3]{-343} \cdot \sqrt[3]{xy} = -7 \cdot \sqrt[3]{xy}$

Dus $A = -7 \cdot \sqrt[3]{xy}$.

b $B = 2 \cdot \sqrt[4]{50p} + \sqrt[4]{60p}$

$B = 2 \cdot \sqrt[4]{50} \cdot \sqrt[4]{p} + \sqrt[4]{60} \cdot \sqrt[4]{p}$

$B \approx 8,10 \cdot \sqrt[4]{p}$ ← $2 \cdot \sqrt[4]{50} + \sqrt[4]{60} \approx 8,10$

Dus $B = 8,10 \cdot \sqrt[4]{p}$.

R42
□ ⊗ *

Zie het voorbeeld.

- a** In voorbeeld a is gebruikt dat $\sqrt[3]{-343} = -7$. Controleer dit door $\sqrt[3]{-343}$ met de rekenmachine te berekenen. Controleer dit ook door $(-7)^3$ te berekenen.
- b** In voorbeeld b is gebruikt dat $2 \cdot \sqrt[4]{50} + \sqrt[4]{60} \approx 8,10$. Bereken dit getal in drie decimalen.

43
□ ⊗

Schrijf de formule in de vorm $A = c \cdot \sqrt[n]{xy}$.

a $A = \sqrt[3]{125xy}$

c $A = \sqrt[5]{-32xy}$

b $A = \sqrt[4]{256xy}$

d $A = 8\sqrt{25xy} - 3\sqrt{49xy}$

44



Herleid de formule tot de vorm $B = c \cdot \sqrt[5]{a}$. Rond c af op twee decimalen.

a $B = 6 \cdot \sqrt[5]{10a}$

b $B = \frac{\sqrt[5]{a}}{7}$

c $B = 2 \cdot \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{-20a}$

d $B = \frac{\sqrt[5]{50a}}{\sqrt[5]{2}}$

A45



a Herleid de formule $K = 2 \cdot \sqrt[3]{8pq} - \sqrt[3]{pq}$ tot de vorm $K = c \cdot \sqrt[3]{pq}$.

b Herleid de formule $F = 2 \cdot \sqrt[4]{9xy} - \sqrt[4]{3x} \cdot \sqrt[4]{6y}$ tot de vorm $F = c \cdot \sqrt[4]{xy}$.

Rond c af op twee decimalen.

c Herleid de formule $N = 4 \cdot \sqrt[5]{243t} + 2 \cdot \sqrt[5]{1024t}$ tot de vorm $N = c \cdot \sqrt[5]{t}$.

R46



Dit hoofdstuk heet Machtsverbanden.

Licht toe waarom het onderwerp 'Wortelformules herleiden' in dit hoofdstuk thuishoort.

A47



a Herleid de formule $y = (200x)^{\frac{1}{3}}$ tot de vorm $y = c \cdot \sqrt[3]{x}$. Rond c af op twee decimalen.

b Herleid de formule $A = 5 \cdot (81p)^{\frac{1}{4}} - (625p)^{\frac{1}{4}}$ tot de vorm $A = c \cdot \sqrt[4]{p}$.

A48



a Herleid de formule $N = 200 \cdot (0,6x)^{\frac{2}{5}}$ tot de vorm $N = c \cdot \sqrt[q]{x^p}$. Rond c af op gehele.

b Herleid de formule $K = 1250 \cdot \sqrt[4]{(1,5x^4y)^3}$ tot de vorm $K = cx^p y^q$. Rond c af op gehele.

O49



De formule $y = \sqrt{x-4}$ is te herleiden tot $x = y^2 + 4$. Zoek uit hoe dat gaat.

Theorie B Variabelen vrijmaken bij wortelformules

Om bij de formule $y = \sqrt{x+2}$ de variabele x vrij te maken, verwissel je eerst het linkerlid en het rechterlid. Daarna kwadrateer je beide leden.

Je gebruikt dan de regel $\sqrt{A} = B$ geeft $A = B^2$.

Je krijgt

$$y = \sqrt{x+2}$$

$$\sqrt{x+2} = y$$

$$x+2 = y^2$$

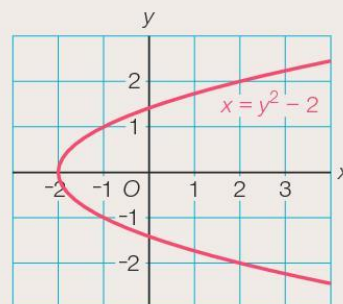
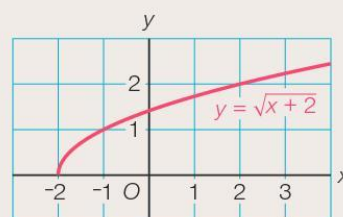
$$x = y^2 - 2$$

Wortelformules kwadrateren

Bij de formule $y = \sqrt{x+2}$ hoort de grafiek hiernaast. Na het vrijmaken van x is de formule $x = y^2 - 2$ ontstaan. Om de bijbehorende grafiek te tekenen, kun je de volgende tabel maken.

y	-2	-1	0	1	2
x	2	-1	-2	-1	2

Je krijgt de grafiek hiernaast. Je ziet dat dit niet dezelfde grafiek is als die van $y = \sqrt{x+2}$. Door het kwadrateren is de onderste helft van de grafiek van $x = y^2 - 2$ erbij gekomen. Eigenlijk zou je bij de formule $x = y^2 - 2$ moeten vermelden dat $y \geq 0$. Je hoeft bij het vrijmaken van variabelen bij wortelformules hier geen rekening mee te houden.



In voorbeeld b wordt de regel $\sqrt[n]{A} = B$ geeft $A = B^n$ gebruikt om bij een formule met een hogere machtswortel de variabele vrij te maken.

Voorbeeld

- a** Maak p vrij bij $Q = 5\sqrt{p-3}$.
b Maak x vrij bij de formule $y = 0,5 \cdot \sqrt[5]{x} + 6$.

Uitwerking

- a** $Q = 5\sqrt{p-3}$ p vrijmaken, dus linker- en rechterlid wisselen.
 $5\sqrt{p-3} = Q$ Deel beide leden door 5.
 $\sqrt{p-3} = \frac{1}{5}Q$ Gebruik de regel $\sqrt{A} = B$ geeft $A = B^2$.
 $p-3 = \left(\frac{1}{5}Q\right)^2$ $\left(\frac{1}{5}Q\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot Q^2 = \frac{1}{25}Q^2$
 $p = \frac{1}{25}Q^2 + 3$
- b** $y = 0,5 \cdot \sqrt[5]{x} + 6$ x vrijmaken, dus linker- en rechterlid wisselen.
 $0,5 \cdot \sqrt[5]{x} + 6 = y$ Zet de term met x apart, dus 6 naar het rechterlid.
 $0,5 \cdot \sqrt[5]{x} = y - 6$ Vermenigvuldig beide leden met 2.
 $\sqrt[5]{x} = 2y - 12$ Gebruik de regel $\sqrt[n]{A} = B$ geeft $A = B^n$.
 $x = (2y - 12)^5$



Bij voorbeeld a zijn in de laatste stap de haakjes weggewerkt. Waarom is dit bij voorbeeld b niet gedaan?

51Maak t vrij.

a $N = 4\sqrt{t-2}$

c $B = 0,2 \cdot \sqrt[3]{t-3}$

b $A = 0,4 \cdot \sqrt[3]{t} + 2$

d $L = 2 \cdot \sqrt[4]{t-5}$

52**a** Je kunt de formule $z = 6\sqrt{8 + \frac{1}{4}y}$ schrijven in de vorm $y = az^2 + b$.
Bereken a en b .**b** Maak A vrij bij de formule $L = \frac{1}{6} \cdot \sqrt[3]{A} - 7$.**c** Schrijf de formule $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt[5]{3x}$ in de vorm $x = ay^n$.**053****a** De formule $y = 2,5x^{\frac{1}{3}}$ is te herleiden tot $x = 0,064y^3$.
Zoek uit hoe dat gaat.**b** De formule $y = 125x^3$ is te herleiden tot $x = 0,2 \cdot \sqrt[3]{y}$.
Zoek uit hoe dat gaat.

Theorie C Variabelen vrijmaken bij machtsformules

Om bij de formule $y = 5(x-4)^3$ de variabele x vrij te maken, verwissel je eerst beide leden en deel je beide leden door 5. Je krijgt

$$y = 5(x-4)^3$$

$$5(x-4)^3 = y$$

$$(x-4)^3 = \frac{1}{5}y$$

Gebruik de regel $A^n = B$ geeft $A = \sqrt[n]{B}$.

$$x-4 = \sqrt[3]{\frac{1}{5}y}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{5}y} + 4$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{y} + 4$$

$$x \approx 0,58 \cdot \sqrt[3]{y} + 4$$

Dus de formule wordt $x = 0,58 \cdot \sqrt[3]{y} + 4$.

Om bij de formule $y = 10x^{0,8}$ de variabele x vrij te maken, verwissel je eerst beide leden en deel je beide leden door 10. Je krijgt

$$y = 10x^{0,8}$$

$$10x^{0,8} = y$$

$$x^{0,8} = 0,1y$$

Gebruik de regel $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$.

$$x = (0,1y)^{\frac{1}{0,8}}$$

$$x = 0,1^{\frac{1}{0,8}} \cdot y^{\frac{1}{0,8}}$$

$$x \approx 0,056y^{1,25}$$

Dus de formule wordt $x = 0,056y^{1,25}$.

Hierboven is de regel $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$ gebruikt.

Je kunt als volgt inzien dat deze regel juist is.

Omdat $A^p = B$ geeft $(A^p)^{\frac{1}{p}} = B^{\frac{1}{p}}$ is $A = B^{\frac{1}{p}}$.

Voorbeeld

- a** Maak t vrij bij $H = 9(t - 2)^2$ met $t \geq 2$.
b Schrijf de formule $L = 16(3A)^{-1,3}$ in de vorm $A = bL^c$. Rond b en c af op twee decimalen.

Uitwerking

- a** $H = 9(t - 2)^2$ t vrijmaken, dus linker- en rechterlid wisselen.
 $9(t - 2)^2 = H$ Deel beide leden door 9.
 $(t - 2)^2 = \frac{1}{9}H$ $t - 2 = -\sqrt{\frac{1}{9}H}$ kan niet, want $t \geq 2$.
 $t - 2 = \sqrt{\frac{1}{9}H}$ $\sqrt{\frac{1}{9}H} = \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{H} = \frac{1}{3}\sqrt{H}$
 $t - 2 = \frac{1}{3}\sqrt{H}$ Breng 2 naar het rechterlid.
 $t = 2 + \frac{1}{3}\sqrt{H}$
- b** $L = 16(3A)^{-1,3}$ A vrijmaken, dus linker- en rechterlid wisselen.
 $16(3A)^{-1,3} = L$ Deel beide leden door 16.
 $(3A)^{-1,3} = \frac{1}{16}L$ Gebruik de regel $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$.
 $3A = \left(\frac{1}{16}L\right)^{\frac{1}{-1,3}}$ $\left(\frac{1}{16}L\right)^{\frac{1}{-1,3}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{-1,3}} \cdot L^{\frac{1}{-1,3}}$
 $A = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{-1,3}} \cdot L^{\frac{1}{-1,3}}$
 $A \approx 2,81L^{-0,77}$
Dus $A = 2,81L^{-0,77}$.

54



- a** Maak t vrij bij $A = 8(t - 2)^3$.
b Maak t vrij bij $P = 0,125(t + 5)^3$.
c Herleid de formule $L = 5(t - 3)^2$ met $t \geq 3$ tot de vorm $t = a + b\sqrt{L}$. Rond a en b zo nodig af op twee decimalen.

55



- Maak telkens x vrij. Schrijf je antwoord in de vorm $x = ay^b$. Rond a en b zo nodig af op twee decimalen.
a $y = 3x^{2,6}$ **b** $y = 0,2 \cdot 2x^{-1,4}$ **c** $y = 15(0,2x)^{1,6}$

56



- Gegeven zijn de formules $P = 5q^{0,12}$ en $R = 1,2q^{-0,18}$.
Uit de formule $R = 1,2q^{-0,18}$ volgt $q = 2,75R^{-5,56}$.
Toon dit aan en schrijf de formule van P in de vorm $P = aR^b$. Rond af op twee decimalen.

A57



- a** Schrijf de formule $P = 2,5q^{3,6}$ in de vorm $q = aP^b$. Rond a en b af op twee decimalen.
b Gegeven zijn de formules $K = 4a^3$ en $O = 8a^2$. Druk K uit in O en druk ook O uit in K . Rond zo nodig af op twee decimalen.

- a Bij de formule $y = \frac{10}{x-3}$ kun je x vrijmaken. Je krijgt $x = 3 + \frac{10}{y}$.
Zoek uit hoe dat gaat.
- b Bij de formule $y = \frac{x+1}{x-3}$ kun je x vrijmaken. Je krijgt $x = \frac{3y+1}{y-1}$.
Zoek uit hoe dat gaat.

Theorie D Variabelen vrijmaken bij gebroken formules

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = BC$ en uit $\frac{A}{C} = B$ volgt $A = BC$.

Dus de vergelijkingen $\frac{A}{B} = C$ en $\frac{A}{C} = B$ komen op hetzelfde neer,

oftewel de vergelijkingen $C = \frac{A}{B}$ en $B = \frac{A}{C}$ komen op hetzelfde neer.

Uit $C = \frac{A}{B}$ volgt $B = \frac{A}{C}$. Deze regel heet de wisseleigenschap.



De regel dat je in de formule $C = \frac{A}{B}$ de variabelen C en B mag verwisselen, gebruik je om variabelen vrij te maken bij gebroken formules.

- Uit $K = \frac{18}{q-3}$ volgt $q-3 = \frac{18}{K}$, oftewel $q = 3 + \frac{18}{K}$.
- $K = 5 + \frac{18}{q}$ geeft $K-5 = \frac{18}{q}$, dus $q = \frac{18}{K-5}$.

Om q vrij te maken bij $K = \frac{2q-1}{q+3}$ heb je niets aan de wisseleigenschap.

Je gebruikt dat $\frac{A}{B} = C$ geeft $A = BC$. Verwissel daartoe eerst het linker- en rechterlid.

$$K = \frac{2q-1}{q+3} \text{ geeft } \frac{2q-1}{q+3} = K$$

$$2q-1 = K(q+3)$$

$$2q-1 = Kq+3K$$

$$2q-Kq = 3K+1 \quad q \text{ vrijmaken, dus alle termen met } q \text{ naar links.}$$

$$q(2-K) = 3K+1 \quad \text{Breng } q \text{ buiten haakjes.}$$

$$q = \frac{3K+1}{2-K}$$

Voorbeeld

Maak L vrij.

a $A = 8 + \frac{160}{L-1}$

b $K = \frac{L-1}{L+1}$

Uitwerking

a $A = 8 + \frac{160}{L-1}$

$$A - 8 = \frac{160}{L-1}$$

$$L-1 = \frac{160}{A-8}$$

$$L = 1 + \frac{160}{A-8}$$

b $K = \frac{L-1}{L+1}$

$$\frac{L-1}{L+1} = K$$

$$L-1 = K(L+1)$$

$$L-1 = KL + K$$

$$L - KL = K + 1$$

$$L(1-K) = K+1$$

$$L = \frac{K+1}{1-K}$$

59 Maak q vrij.



a $K = 5 + \frac{8}{q}$

d $P = 18 - \frac{5}{q-2}$

b $K = \frac{8}{q-1}$

e $P = \frac{7}{3q-2}$

c $K = \frac{q+3}{2q-1}$

f $A = \frac{q}{q+4}$

A60



a Druk a uit in T als gegeven is dat $T = \frac{a}{a-6}$.

b Maak q vrij bij $L = 320 - \frac{18}{q-1}$.

c Druk y uit in x bij de formule $\frac{3x}{x+y} = 5 - x$.

R61

De formule $y = \frac{1}{x}$ hoort bij een machtsverband.

a Licht dit toe.

b De grafiek van $y = \frac{4}{x-3}$ ontstaat uit de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ door een verschuiving en een herschaling in verticale richting. Geef deze verschuiving en herschaling.

c De formule $y = \frac{x+1}{x-3}$ kan geschreven worden als $y = 1 + \frac{4}{x-3}$. Controleer dit door $1 + \frac{4}{x-3}$ als één breuk te schrijven.

d Hoe ontstaat de grafiek van $y = \frac{x+1}{x-3}$ uit de grafiek van $y = \frac{1}{x}$?

e Licht toe dat de formule $y = \frac{x+1}{x-3}$ te maken heeft met een machtsverband.

Terugblik

Wortelformules herleiden

Met de regels $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ en $\sqrt[n]{A \cdot B} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$ zijn wortelformules te herleiden.

Bij het herleiden van $A = \sqrt{900x} - \sqrt{625x}$ krijg je
 $A = \sqrt{900} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{625} \cdot \sqrt{x} = 30\sqrt{x} - 25\sqrt{x} = 5\sqrt{x}$.

Bij het herleiden van $B = 10 \cdot \sqrt[3]{20p} - 5 \cdot \sqrt[3]{10p}$ krijg je
 $B = 10 \cdot \sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{p} - 5 \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{p} \approx 16,37 \cdot \sqrt[3]{p}$,
dus $B = 16,37 \cdot \sqrt[3]{p}$.

Variabelen vrijmaken bij wortelformules en machtsformules

Bij het vrijmaken van p uit de formule $D = \frac{1}{12}\sqrt{p+10}$ gebruik je de regel

$$\begin{aligned}\sqrt{A} = B &\text{ geeft } A = B^2. \text{ Je krijgt } \frac{1}{12}\sqrt{p+10} = D \\ \sqrt{p+10} &= 12D \\ p+10 &= (12D)^2 \\ p &= 144D^2 - 10.\end{aligned}$$

Hieronder zie je hoe je q vrijmaakt bij de formule $E = 2\frac{1}{4}(q-6)^2$ met $q \geq 6$.

$$\begin{aligned}2\frac{1}{4}(q-6)^2 &= E \\ (q-6)^2 &= \frac{4}{9}E \\ q-6 &= \sqrt{\frac{4}{9}E} \\ q &= \frac{2}{3}\sqrt{E} + 6\end{aligned}$$

Hiernaast zie je hoe je de formule $F = 25(2t)^{1,6}$ in de vorm $t = aF^b$ schrijft. Gebruik de regel $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$.

$$\begin{aligned}25(2t)^{1,6} &= F \\ (2t)^{1,6} &= 0,04F \\ 2t &= (0,04F)^{\frac{1}{1,6}} \\ t &= \frac{1}{2} \cdot 0,04^{\frac{1}{1,6}} \cdot F^{\frac{1}{1,6}} \\ t &\approx 0,067F^{0,625} \\ \text{Dus } t &= 0,067F^{0,625}.\end{aligned}$$

Variabelen vrijmaken bij gebroken formules

Hieronder zie je hoe je de variabele x vrijmaakt bij de formules

$G = \frac{2}{x-3} + 4$ en $H = \frac{2x}{x+3}$. Bij de formule van G gebruik je de

wisseleigenschap en bij de formule van H gebruik je dat

$\frac{A}{B} = C$ geeft $A = BC$. Verwissel bij de formule van H eerst beide leden.

$$\begin{aligned}G &= \frac{2}{x-3} + 4 & \frac{2x}{x+3} &= H \\ G-4 &= \frac{2}{x-3} & 2x &= H(x+3) \\ x-3 &= \frac{2}{G-4} & 2x &= Hx+3H \\ x &= \frac{2}{G-4} + 3 & 2x-Hx &= 3H \\ & & x(2-H) &= 3H \\ & & x &= \frac{3H}{2-H}\end{aligned}$$

5.4 Formules met machten en wortels

062



- a** Tussen x en y bestaat het verband $y = ax^3$. Voor $x = 2$ is $y = 48$. Bereken a .
- b** Tussen x en y bestaat het verband $y = 10x^p$. Voor $x = 4$ is $y = 80$. Bereken p . Gebruik je GR.

Theorie A Formules opstellen bij machtsverbanden

Bij een formule van de vorm $y = ax^n$ heb je te maken met een machtsverband tussen x en y .

In opgave 62a heb je bij gegeven x en y de **coëfficiënt** a berekend in de formule $y = ax^3$.

Bij de formule $y = 5x^n$ is de exponent n te berekenen bij gegeven x en bijbehorende y . Voor $x = 2$ en $y = 80$ krijg je $5 \cdot 2^n = 80$. Oftewel $2^n = 16$ en dit geeft $n = 4$. Dus de formule is $y = 5x^4$.

Voorbeeld

- a** Gegeven is de formule $y = ax^{1,73}$. Voor $x = 5$ is $y = 820$. Stel de formule op van y . Rond a af op één decimaal.
- b** Gegeven is de formule $N = 20t^p$. Voor $t = 3$ is $N = 50$. Bereken p . Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} y = ax^{1,73} \\ x = 5 \text{ en } y = 820 \end{array} \right\} a \cdot 5^{1,73} = 820, \text{ dus } a = \frac{820}{5^{1,73}} \approx 50,7$$

$$\text{Dus } y = 50,7x^{1,73}.$$

$$\left. \begin{array}{l} N = 20t^p \\ t = 3 \text{ en } N = 50 \end{array} \right\} 20 \cdot 3^p = 50$$

$$\text{Voer in } y_1 = 20 \cdot 3^x \text{ en } y_2 = 50.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 0,83$, dus $p \approx 0,83$.

63



- a** Gegeven is de formule $y = ax^{-1,81}$. Voor $x = 12$ is $y = 16$. Stel de formule op van y . Rond a af op gehelen.
- b** Gegeven is de formule $y = 180x^p$. Voor $x = 4$ is $y = 900$. Stel de formule op van y . Rond p af op twee decimalen.

A64



Voor $x = 8$ en $y = 600$ is gegeven de formule $y = ax^b$.

- a** Neem $b = 2,15$ en bereken a . Rond af op twee decimalen.
- b** Neem $a = 50$ en bereken b . Rond af op twee decimalen.

A65
□ ⊗ *

Gegeven is de formule $A = ap^{1,83}$. Voor $p = 18$ is $A = 350$.

- a Bereken A voor $p = 25$. Rond af op gehele.
- b Schrijf de formule in de vorm $p = b \cdot A^c$. Rond b en c af op drie decimalen.

O66
□ ⊗ *

Planken is een fitnessoefening waarbij je voornamelijk je buikspieren traint. Manon doet de oefening regelmatig. Ze heeft bijgehouden hoelang ze de oefening kan volhouden. Zie de tabel.

poging n	5	10	15	20
tijd t in seconden	65	100	130	150



Je ziet dat ze het bij haar 20^e poging al twee en een halve minuut kan volhouden.

Manon heeft bij de tabel de formule $t = 25n^{0,6}$ gemaakt.

- a Onderzoek of deze formule past bij de tabel.
- b Manon beweert dat de tijd die ze de oefening kan volhouden met 50% toeneemt als het aantal pogingen verdubbelt. Onderzoek of dat klopt.

Theorie B Machtsformules gebruiken

In de praktijk komen allerlei machtsformules voor. Zo heeft Manon bij haar fitnessoefening te maken met de formule $t = 25n^{0,6}$. Hierin is t de tijd in seconden dat ze de n^e oefening kan volhouden.

Met deze formule is te berekenen met welk percentage de tijd toeneemt als n verdubbelt. Neem in de formule $2n$ voor n . Je krijgt $t = 25 \cdot (2n)^{0,6} = 25 \cdot 2^{0,6} \cdot n^{0,6} = 2^{0,6} \cdot 25n^{0,6} \approx 1,516 \cdot 25n^{0,6}$.

Dus de tijd dat ze de oefening kan volhouden neemt met ongeveer 52% toe als het aantal pogingen verdubbelt.

Om te berekenen hoeveel keer zo groot n wordt als t verdubbelt, druk je eerst n uit in t . Dus $25n^{0,6} = t$ geeft $n^{0,6} = 0,04t$ en hieruit volgt

$$n = (0,04t)^{\frac{1}{0,6}}.$$

Neem in deze formule $2t$ voor t .

$$\text{Je krijgt } n = (0,04 \cdot 2t)^{\frac{1}{0,6}} = 2^{\frac{1}{0,6}} \cdot (0,04t)^{\frac{1}{0,6}} \approx 3,2 \cdot (0,04t)^{\frac{1}{0,6}}.$$

Dus voor een verdubbeling van de tijd dat ze de oefening kan volhouden, moet het aantal pogingen ongeveer 3,2 keer zo groot worden.

67

Zie de theorie.



- a** Met hoeveel procent neemt de tijd t toe als Manon het aantal pogingen verdrievoudigt? Rond af op gehele.
- b** Met welke factor moet Manon het aantal pogingen groter maken om de tijd dat ze de oefening kan volhouden met 40% te laten toenemen? Rond af op twee decimalen.

68



- a** Voor de remweg van een auto geldt de formule $r = 0,016v^{1,75}$. Hierin is r de remweg in meter bij een snelheid van v km/uur. Bereken hoeveel keer zo lang de remweg is als de snelheid verdubbelt. Rond af op één decimaal.
- b** Bij het maken van een bepaald type vliegtuig geldt voor het aantal metingen dat nodig is voor het produceren van één toestel de formule $M = 150000n^{-0,3}$. Hierin is M het aantal metingen dat nodig is voor het produceren van het n^e toestel. Bereken met hoeveel procent M afneemt als het aantal geproduceerde toestellen verdubbelt.
- c** Op de eilanden in het Caribisch gebied vonden biologen een verband tussen de oppervlakte van het eiland en het aantal soorten amfibieën en reptielen dat er voorkomt. Hierbij hoort de formule $N = 4,4A^{0,3}$ met N het aantal soorten op het eiland en A de oppervlakte van het eiland in km^2 .
Op eiland P komen 25% meer soorten voor dan op eiland Q. Bereken hoeveel keer zo groot eiland P is als eiland Q.

69



Het benzineverbruik van een auto is gegeven door de formule $B = 0,001v^2 - 0,12v + 7,8$. Hierin is B het benzineverbruik in liter per 100 km bij een snelheid van v km/uur met $20 \leq v \leq 140$.

- a** Mevrouw Koning wil zo zuinig mogelijk rijden. Welke snelheid moet zij aanhouden?
- b** Meneer Keizer rijdt met een constante snelheid. Hij moet nog 60 km rijden. In de tank zit nog 3 liter benzine. Met welke snelheid kan meneer Koning maximaal rijden als hij zonder te tanken op de plaats van bestemming wil aankomen?

70



Zie opgave 69 met de formule $B = 0,001v^2 - 0,12v + 7,8$. Hierin is B het benzineverbruik in liter per 100 km bij een snelheid van v km/uur. Meneer Admiraal rijdt om 21:00 uur met een snelheid van 120 km/uur over de snelweg. Met deze snelheid heeft hij genoeg benzine voor een afstand van 60 km, maar de eerstvolgende benzinepomp is 90 km verder. Hij wil de benzinepomp zo snel mogelijk bereiken. Hoe laat kan hij op zijn vroegst bij de benzinepomp zijn? Rond af op gehele minuten.

71



In deze opgave gaan we uit van een eiken plank met een dikte van 2,5 cm. Met de formule $d = 0,0005gl^4$ is te berekenen hoeveel zo'n plank doorbuigt als deze gelijkmatig belast wordt. In de formule is d de doorbuiging in mm, g het gewicht in kg per mm plank gerekend in de lengterichting en l de lengte van de plank in dm.

- a Op een plank met een lengte van 2 meter liggen 20 stenen van elk 4 kg. Hoeveel mm is de doorbuiging?
- b Op een plank met een lengte van 2,5 meter liggen zoveel stenen dat de doorbuiging 2,5 mm is. Hoeveel is het totale gewicht van de stenen?

Bij de vragen c, d en e is $g = 0,05$.

- c Met hoeveel procent neemt de doorbuiging van een plank toe als de plank 20% langer zou zijn?
- d Bereken de lengte van de plank die 2,2 mm doorbuigt. Rond af op gehele cm.
- e Schrijf de formule van $d = 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot l^4$ in de vorm $l = a \cdot \sqrt[n]{d}$. Rond a af op gehele.

72



Om ongelukken te voorkomen, moet een automobilist voldoende afstand bewaren tot de auto die voor hem rijdt.

Men gebruikt hierbij een formule voor de *veilige afstand* A .

Deze formule is $A = 0,005v^2 + 0,28v$. Hierin is v de snelheid in km/uur en A de afstand in meter. In de praktijk zal echter geen enkele automobilist deze formule toepassen. Daarom heeft men de volgende vuistregel bedacht, de zogenaamde *tweesecondenregel*:

Om te bepalen of de afstand tot je voorligger voldoende groot is, kies je tijdens het rijden een herkenbaar punt langs de weg. Op het moment dat je voorligger dit punt passeert, tel je 2 seconden. Als je vervolgens binnen deze 2 seconden zelf voorbij dit punt rijdt, zit je te dicht op je voorligger en zul je meer afstand moeten nemen.



- a Hoeveel meter leg je af in twee seconden bij een snelheid van v km/uur?
- b Bereken bij welke snelheid de vuistregel dezelfde afstand geeft als de formule. Geef het antwoord in gehele km/uur.

Bij een snelheid van 120 km/uur zul je meer dan 2 seconden moeten tellen om de veilige afstand A te bereiken.

- c Onderzoek bij welk aantal seconden de veilige afstand wél wordt bereikt bij een snelheid van 120 km/uur. Rond af op één decimaal.

Het go-spel

Go is de oudste bekende denksport ter wereld. Al meer dan 3000 jaar geleden ontstond het spel in China. Het is een spel voor twee personen, dat gespeeld wordt op een bord met 19×19 lijnen. Om beurten leggen de spelers een steen op het snijpunt van twee lijnen. Het is de bedoeling dat je de stenen zo neerlegt, dat je een zo groot mogelijk deel van het

speelveld gaat beheersen. Stenen van je tegenstander die zijn ingesloten, haal je van het bord.

Het go-spel is pas in de loop van de 20^e eeuw in Europa bekend geworden. In 1959 werd de Nederlandse Go Bond opgericht.

Momenteel telt de Go Bond zo'n 600 leden.

73
□ ⊙

Jaarlijks vinden in Nederland go-toernooien plaats. De rangschikking wordt berekend met de

formule $S = \frac{1000(w - \sqrt{w})}{g}$. Hierin is w het aantal

gewonnen partijen, g het aantal gespeelde partijen en

S de score. De score S wordt afgerond op gehelen.

Tijdens een toernooi speelt elke deelnemer 16 partijen.

a Wat is de maximale score die een deelnemer kan halen?

b Eline heeft een score van 375.

Onderzoek hoeveel partijen zij gewonnen heeft.

c Nova heeft twee partijen meer gewonnen dan Finn. Daardoor is de score van Nova 101 meer dan die van Finn.

Onderzoek hoeveel partijen Nova heeft gewonnen.



A74
□ ⊙ *

Er zijn heel wat formules in omloop om uit de afmetingen van een paard een schatting van het gewicht te krijgen.

Eén daarvan is de *formule van Marcenac en Aublet*. Deze formule is van de vorm $G = aR^3$, waarin G het gewicht in

kg is en R de rompomvang in meter. Van een paard met

een rompomvang van 2 meter en 3 cm is het gewicht

670 kg. Hieruit volgt dat a in gehelen nauwkeurig gelijk

is aan 80.

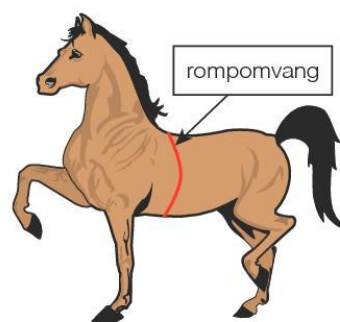
a Bereken a . Rond af op één decimaal.

b Bereken in cm nauwkeurig de rompomvang van een paard dat 580 kg weegt.

c Van een paard is de rompomvang 1,2 keer zo groot als een ander paard. Hoeveel keer zo groot is het gewicht?

d Van een paard is het gewicht twee keer zo groot als van een ander paard. Hoeveel keer zo groot is de rompomvang? Rond af op twee decimalen.

e Schrijf de formule van $G = 80R^3$ in de vorm $R = bG^c$. Rond b af op drie decimalen.



figuur 5.6

A75
□ ⊗ *

Elanden leven in noordelijke streken, met name in Scandinavische landen, Siberië en Canada. Mannetjes kunnen ruim twee meter groot worden en tot 800 kg wegen. Vrouwtjeselanden zijn een stuk kleiner en hebben een gewicht tot 375 kg.

De hoeveelheid energie die een eland per dag nodig heeft voor de basislichaamsfuncties, is afhankelijk van het gewicht. De formule die hierbij hoort is $E_{\text{basis}} = 140W^{0,75}$ met W het gewicht in kg. Elanden zijn een groot gedeelte van de dag bezig met het zoeken naar voedsel. Ze eten voornamelijk scheuten en twijgen van bomen. Het bijeenstellen van dit voedsel kost veel tijd en energie. Als er voldoende voedsel wordt gevonden, krijgt een eland meer energie binnen dan dat het zoeken ernaar kost. De formule die hoort bij de energie die zo per dag overblijft is $E_{\text{beschikbaar}} = 2200\sqrt{W} - 40W - 11\,500$. Deze energie moet dus minstens gelijk zijn aan E_{basis} om te overleven. In beide formules is E de energie in kcal.

- a** De grafieken van de gegeven formules hebben twee snijpunten. Bereken de coördinaten van de snijpunten en geef hiervan de praktische betekenis.

Bij het optimale gewicht van een eland is $E_{\text{beschikbaar}} - E_{\text{basis}}$ maximaal.

- b** Bereken het optimale gewicht van een eland. Geef het antwoord in gehele kg. Hoeveel energie per dag houdt de eland dan over voor andere activiteiten dan het zoeken naar voedsel?

Een elandjong is na de geboorte afhankelijk van moedermelk. Deze afhankelijkheid duurt totdat een gewicht is bereikt waarop het kalf zelfstandig voor zijn voedsel kan zorgen.

Een kalf dat op 1 juni werd geboren, weegt bij de geboorte 12 kg. De eerste maand verdubbelt het kalf in gewicht en daarna neemt het gewicht met 1 kg per dag toe.

- c** Onderzoek vanaf welke datum het kalf kan ophouden met drinken bij de moeder en zelfstandig voor zijn voedsel kan zorgen.



Winkels hebben van de artikelen die ze verkopen een bepaalde voorraad. Deze voorraad moet niet te groot zijn, want dan krijg je te maken met hoge voorraadkosten. Een winkel moet dus niet te grote bestellingen in één keer doen. Ook heeft de winkel te maken met de kosten die gemoeid zijn met het doen van een bestelling: de bestelkosten.

Met de *formule van Camp* is de optimale bestelhoeveelheid te berekenen voor winkels die te maken hebben met een constante vraag naar een bepaald artikel.

Deze formule is $Q = \sqrt{\frac{2Bn}{V}}$. Hierin is

- Q de optimale bestelhoeveelheid
 - B de bestelkosten in euro's, ongeacht de grootte van de bestelling
 - n het aantal verkochte artikelen per jaar
 - V de voorraadkosten in euro's per stuk per jaar.
- a** Een winkel verkoopt per jaar 2400 vazen van een bepaald model. De bestelkosten zijn 15 euro en de voorraadkosten per vaas per jaar zijn 5 cent.
Toon aan dat de winkel twee keer per jaar een bestelling zal plaatsen.
- b** Een andere winkel verkoopt per jaar 800 droogmolens.
Schrijf voor deze winkel de formule van Camp in de vorm $Q = c\sqrt{\frac{B}{V}}$.
- c** Voor een winkel zijn de bestelkosten voor het bestellen van strijkplanken 25 euro en zijn de voorraadkosten 80 cent per strijkplank per jaar.
De optimale bestelhoeveelheid is te schrijven in de vorm $Q = d\sqrt{n}$.
Bereken d . Rond af op één decimaal.
- d** De voorraadkosten V worden soms berekend met de formule $V = 0,01p \cdot I$. Hierin is I de inkoopprijs per stuk van een artikel en is p een percentage. Dit percentage geeft aan hoeveel procent van de inkoopprijs aan voorraadkosten wordt uitgegeven. Bij een inkoopprijs van 60 euro per stuk en een percentage van 0,5% zijn de voorraadkosten dan $0,01 \cdot 0,5 \cdot 60 = 0,3$, dus 30 cent per stuk per jaar. Een winkel verkoopt per jaar 200 hogedrukreinigers van type A. De inkoopprijs van deze hogedrukreinigers is 160 euro per stuk en de bestelkosten per bestelling zijn 25 euro. Bij een optimale bestelhoeveelheid blijken vier bestellingen per jaar te horen. Bereken p .



A77
□ ⊗ *

Met de bekende formule $B = \frac{m}{l^2}$ wordt de body-mass index (BMI)

berekend. In deze formule is B de BMI, m het lichaamsgewicht in kg en l de lengte in meter.

Een andere maat die iets zegt over gezond gewicht is de body-shape index (BSI). De formule van BSI is $S = t \cdot B^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{-\frac{1}{2}}$. Hierin is S de BSI, t de taille-omvang in meter, B de BMI en l de lengte in meter.

- a** Bereken de BSI van een persoon met een taille-omvang van 90 cm, een BMI van 23 en een lengte van 180 cm. Rond af op drie decimalen.

Je kunt S uitdrukken in t , m en l . Deze formule is $S = t \cdot m^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{\frac{5}{6}}$.

- b** Leid deze formule af uit de formules van S en B .

- c** Schrijf de formule $S = t \cdot m^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{\frac{5}{6}}$ zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

- d** Voor personen met een taille-omvang van 95 cm en een lengte van 175 cm is de formule van S te schrijven in de vorm $m = aS^b$. Leid deze formule af. Rond a af op twee decimalen.

E78
*

Bij breedbeeldschermen is de verhouding tussen de lange en de korte zijde 16 : 9.

Er geldt $A = \frac{9}{16}x^2$ en $d^2 = \frac{337}{256}x^2$. Hierin is x de lange zijde van zo'n scherm in cm, A de oppervlakte van het scherm in cm^2 en d de lengte van de diagonaal van het scherm in cm.

- a** Toon de juistheid van de formules van A en d^2 aan en toon aan dat uit deze formules volgt dat $A = \frac{144}{337}d^2$.



Superbreedbeeldschermen hebben een verhouding 7 : 3. Ook voor deze schermen is een formule op te stellen van de vorm $A = a \cdot d^2$.

- b** Bereken a .

Terugblik

Formules opstellen bij machtsverbanden

Bij de machtsformule $B = at^{2,52}$ is de coëfficiënt a te berekenen als gegeven is dat bij $t = 3,1$ hoort $B = 5,3$.

Je krijgt $a \cdot 3,1^{2,52} = 5,3$ en dit geeft $a \approx 0,31$.

Dus de formule is $B = 0,31t^{2,52}$.

Bij de formule $N = 4,7q^p$ is de exponent p te berekenen als gegeven is dat bij $q = 3$ hoort $N = 870$.

Je krijgt $4,7 \cdot 3^p = 870$.

Voer in $y_1 = 4,7 \cdot 3^x$ en $y_2 = 870$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 4,75$, dus $p \approx 4,75$.

Dus de formule is $N = 4,7q^{4,75}$.

Je kunt je afvragen met hoeveel procent N toeneemt als q met 10% toeneemt.

Invullen van $1,1q$ in de formule geeft

$$N = 4,7(1,1q)^{4,75} = 4,7 \cdot 1,1^{4,75} \cdot q^{4,75} = 1,1^{4,75} \cdot 4,7q^{4,75} \approx 1,573 \cdot 4,7q^{4,75}.$$

Dus de toename van N is ongeveer 57%.

Machtsformules gebruiken

De body-mass index (BMI) wordt berekend met de formule $B = \frac{m}{l^2}$.

Hierin is B de BMI, m het lichaamsgewicht in kg en l de lengte in meter.

Ook wordt wel eens de formule $B_T = 1,3m \cdot l^{-2,5}$ gebruikt. Hierin is B_T de BMI volgens professor Trefethen.

Je kunt in beide formules de variabele m vrijmaken.

$$B = \frac{m}{l^2} \text{ geeft } m = B \cdot l^2$$

$$B_T = 1,3m \cdot l^{-2,5} \text{ geeft } 1,3m \cdot l^{-2,5} = B_T$$

$$m \cdot l^{-2,5} = \frac{1}{1,3} B_T$$

$$m = \frac{\frac{1}{1,3} B_T}{l^{-2,5}}$$

$$m = \frac{1}{1,3} B_T \cdot l^{2,5}$$

Je kunt ook B_T uitdrukken in B en l . Vul daartoe $m = Bl^2$ in bij de formule van B_T .

$$\text{Je krijgt } B_T = 1,3 \cdot Bl^2 \cdot l^{-2,5} = 1,3Bl^{-0,5}, \text{ oftewel } B_T = \frac{1,3B}{\sqrt{l}}.$$

Eindopdracht Van Whistler Mountain naar Whistler

In de beginopdracht van dit hoofdstuk heb je formules opgesteld die horen bij de kabelbaan van Whistler naar Whistler Mountain.

In de figuur hiernaast zie je nog eens de grafiek waarin de hoogte van een cabine ten opzichte van Whistler is uitgezet tegen de tijd die de cabine erover doet om naar boven te gaan.

Je ging er in eerste instantie van uit dat elk van de vier delen te beschrijven is door een tweedegraadsformule.

Je kreeg

$$\text{I} \quad h = -31,25(t - 4)^2 + 500$$

$$\text{II} \quad h = 62,5(t - 4)^2 + 500$$

$$\text{III} \quad h = -62,5(t - 8)^2 + 1000$$

$$\text{IV} \quad h = 62,5(t - 8)^2 + 1000$$

Eén van de volgende cabines vertrekt precies één minuut na de cabine waarvan de grafiek in de figuur is getekend.

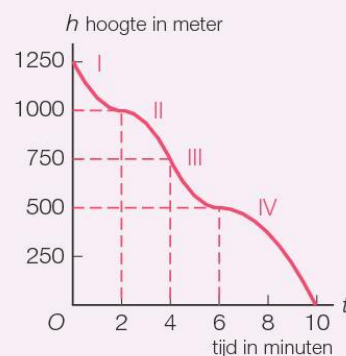
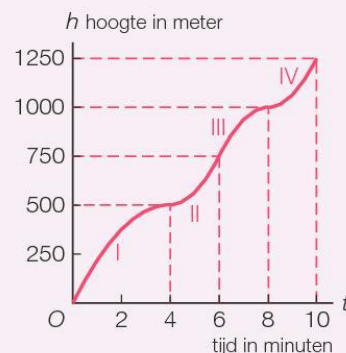
- Geef de vier formules die bij deze cabine horen.

Je hebt in de beginopdracht ook gezien dat je de delen II en III kunt beschrijven door de derdegraadsformule $h = -15,625(t - 6)^3 + 187,5(t - 6) + 750$.

- Geef de derdegraadsformule van de delen II en III die bij de cabine hoort die precies één minuut vertrekt na de cabine die bij de gegeven grafiek hoort.

In de grafiek hiernaast is de hoogte van een cabine die van Whistler Mountain naar Whistler gaat, uitgezet tegen de tijd. Er zijn weer vier delen getekend, die zijn aangegeven met I, II, III en IV.

- Stel bij deze vier delen een formule op waarbij je ervan uitgaat dat je te maken hebt met vier gedeelten van parabolen.
- Stel bij de delen II en III één derdegraadsformule op. Ga te werk zoals dat in de beginopdracht is gedaan.



Diagnostische toets

5.1 Rekenen met machten

- 1 Herleid de volgende formules.

a $A = \frac{18a^5}{6a^2} - \frac{(5a^2b)^2}{5ab^2}$

b $B = (3x^2)^3 - 2x \cdot 4x^5 + 3x^2 \cdot 5x^3$

c $C = (2p^2q)^3 - 5pq \cdot 2p^2q^4 + 3p^3 \cdot (pq)^3 - \frac{8p^5q^6}{2p^2q}$

- 2 Schrijf als macht van a .

a $\frac{1}{a^3}$

b $a^4 \cdot \frac{1}{a^7}$

c $\left(\frac{1}{a^{12}}\right) \cdot \frac{1}{a^{-5}}$

- 3 Schrijf zonder negatieve exponent.

a $3a^2b^{-3}$

b $\left(\frac{1}{2}a\right)^{-5}$

c $\frac{2}{7}a^{-1}b^4$

- 4 Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

a $4a^{-1\frac{1}{2}}$

b $a^{-2}b^{\frac{1}{5}}$

c $7a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{5}}$

- 5 Schrijf als macht van x .

a $x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

b $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

c $\frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{x^3}$

- 6 Schrijf in de vorm $y = ax^p$.

a $y = 7 \cdot \sqrt[5]{x^2}$

b $y = 6x^{-0,4} \cdot x^{1,2}$

c $y = \frac{10}{2x^3 \cdot \sqrt{x}}$

5.2 Grafieken veranderen

- 7 Op de grafiek van $y = 4(x - 2)^3 + 1$ wordt de verschuiving $(-1, -5)$ toegepast.

Stel de formule op van de beeldgrafiek.

- 8 Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld in je schets de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

a $N = 2(t - 4)^3 + 5$

b $K = -3(q + 1)^2 + 2$

c $S = 4(t - 2)^4 + 1$

- 9 De grafiek van $y = 1\frac{1}{2}(x - 2)^4 - 5$ wordt eerst herschaald in verticale richting met factor 4. Vervolgens wordt de verschuiving $(-3, -16)$ toegepast.

Stel de formule op van de beeldgrafiek en vermeld de coördinaten van de top.

5.3 Formules herleiden en variabelen vrijmaken

- 10** **a** Herleid de formule $A = \sqrt[3]{100b} - 4 \cdot \sqrt[3]{b}$ tot de vorm $A = c \cdot \sqrt[3]{b}$. Rond c af op twee decimalen.
- b** Herleid de formule $B = 3 \cdot \sqrt[4]{16pq} - \sqrt[4]{3p} \cdot \sqrt[4]{27q}$ tot de vorm $B = c \cdot \sqrt[4]{pq}$.
- 11** **a** Je kunt de formule $F = 0,125\sqrt{p-5}$ schrijven in de vorm $p = aF^2 + b$. Bereken a en b .
- b** Herleid de formule $S = 0,4(R-7)^2$ met $R \geq 7$ tot de vorm $R = a + b\sqrt{S}$. Rond b af op twee decimalen.
- c** Schrijf de formule $y = 2(0,3x)^{1,25}$ in de vorm $x = ay^b$. Rond a af op twee decimalen.
- 12** **a** Maak p vrij bij de formule $F = 4 + \frac{3}{p-5}$.
- b** Gegeven is de formule $G = \frac{3q-1}{4q+5}$. Druk q uit in G .

5.4 Formules met machten en wortels

- 13** De tijd t in minuten die een persoon nodig heeft om n nieuwe symbolen te leren, voldoet volgens een regel uit de psychologie aan de formule $t = an^{0,75}$. Monique is in staat tien symbolen te leren in twee minuten. Hieruit volgt dat $a \approx 0,36$.
- a** Bereken a in drie decimalen.
- b** Met hoeveel procent neemt de tijd toe als het aantal te leren symbolen verdubbelt?
- c** Hoeveel keer zo groot wordt het aantal geleerde symbolen als de beschikbare tijd om ze te leren met 50% toeneemt? Rond af op twee decimalen.
- 14** Van Rutger is jarenlang zijn gewicht G in kg en zijn lengte l in meters bijgehouden. Dit leverde het verband $G = 13,4l^3$ op.
- a** Hoeveel woog Rutger toen hij 173 cm lang was?
- b** Hoe lang was Rutger op 12-jarige leeftijd toen hij 32 kg woog?
- c** Schrijf de formule van G in de vorm $l = a \cdot \sqrt[n]{G}$. Rond a af op twee decimalen.

Gemengde opgaven

5 Machtsverbanden

- 1** a Schrijf de formule $y = 3 \cdot \frac{(2x^{0,6})^3}{x^{-4}}$ in de vorm $y = ax^p$.
b Schrijf de formule $A = 2^{x-3} \cdot 3^{y+2}$ in de vorm $A = b \cdot 2^x \cdot 3^y$.
c Herleid de formule $N = 5 \cdot \sqrt[3]{64t} + 2 \cdot \sqrt[3]{27t}$ tot de vorm $N = c \cdot \sqrt[3]{t}$.
- 2** a Schrijf de formule $A = 4^{2\frac{1}{2}} \cdot x^{-3\frac{1}{4}} \cdot y^{1\frac{1}{2}}$ zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.
b Schrijf $\frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{x^4 \cdot \sqrt[5]{x}}$ als macht van x .
c Herleid de formule $P = 4 \cdot (243xy)^{0,2} - (32xy)^{0,2}$ tot de vorm $P = a \cdot \sqrt[b]{xy}$.
- 3** Gegeven is de formule $y_1 = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 4$.
a De grafiek van y_2 ontstaat uit de grafiek van y_1 bij de verschuiving $(2, 6)$.
Stel de formule op van y_2 en geef de top van de bijbehorende grafiek.
b Er geldt $y_3 = 3 \cdot y_1$.
Stel de formule op van y_3 .
c Op de grafiek van y_1 wordt de verschuiving (a, b) toegepast. Zo ontstaat de grafiek van y_4 . De top van de grafiek van y_4 is $(8, -2)$.
Bereken a en b .
d Op de grafiek van y_1 wordt eerst de verschuiving (c, c) toegepast en vervolgens de herschaling in verticale richting met factor d . Zo ontstaat de grafiek van y_5 . De top van de grafiek van y_5 is $(6, 14)$.
Bereken c en d .
- 4** a Maak p vrij bij $A = 0,4 \cdot \sqrt[3]{p-6}$.
b Maak q vrij bij $B = 16(q-5)^2$ met $q > 5$.
c Schrijf de formule $C = 12,5(4D)^{-1,5}$ in de vorm $D = aC^b$.
Rond a en b af op twee decimalen.
d Schrijf de formule $y = 0,25\sqrt{6-0,4x}$ in de vorm $x = ay^2 + b$.

5 De formule $G = 0,4d^3$ geeft het verband tussen het gewicht G in gram van een appel en de diameter d in cm.

- a** Van een appel is het gewicht 65 gram.
Welke diameter volgt uit de formule? Geef het antwoord in mm nauwkeurig.
- b** Hoeveel keer zo groot wordt G als d verdubbelt?
- c** Een appel is twee keer zo zwaar als een andere appel.
Bereken hoeveel procent groter de diameter dan is. Rond af op gehele.

6 Bij een vast drukverschil hangt de hoeveelheid water W in liter die per seconde door een buis stroomt af van de diameter d in cm. De bijbehorende formule heeft de vorm $W = ad^4$.

- a** Bij een buis met een diameter van 5 cm is $W = 13,5$.
Bereken a .

Reken in deze opgave verder met $a = 0,02$, dus met de formule $W = 0,02d^4$.

- b** Een buis heeft een diameter van 8 cm.
Hoeveel liter water stroomt er per minuut door de buis?
- c** In een uur tijd stroomt er 16 650 liter water door een buis.
Bereken de diameter van de buis in mm nauwkeurig.
- d** Hoeveel keer zoveel water stroomt er per seconde door een buis als de diameter 30% groter wordt genomen? Rond af op één decimaal.
- e** Welk percentage moet de diameter van een buis groter worden genomen als er per seconde twee keer zoveel water door de buis moet stromen? Rond af op gehele.

7 Wetenschappers hebben een formule opgesteld die het verband geeft tussen het te verwachten hersengewicht H in gram en het lichaamsgewicht G in kg. De formule is $H = 12 \cdot G^{0,67}$.

Bij sommige dieren verschilt H fors van het werkelijke hersengewicht.

Wetenschappers gebruiken de formule $I = \frac{W}{H}$ als maat voor de intelligentie van een dier. Hierin is W het werkelijke hersengewicht in gram.

- a** Bij een schaap van 40 kg is het werkelijke hersengewicht 130 gram.
Bereken I . Rond af op twee decimalen.
- b** Een mens van 70 kg heeft een hersengewicht van 1650 gram.
Bereken I . Rond af op één decimaal.
- c** Van een giraffe is $I = 1,04$. Het werkelijke hersengewicht is 1050 gram.
Welk gewicht G volgt hieruit voor de giraffe? Rond af op gehele.
- d** Schrijf de formule van I in de vorm $I = a \cdot W \cdot G^b$. Rond a af op drie decimalen.

8 a De formule $G = 25 - \frac{16}{z+1}$ is te schrijven in de vorm $z = \frac{G+a}{b-G}$.

Bereken a en b .

b Gegeven is $\frac{5p}{2p+q} = 10 + 3p$.

Druk q uit in p .

9 Er bestaat een verband tussen de populatiedichtheid P en de gemiddelde lengte l in meter van een volwassen organisme. Dit verband is te benaderen door het model $P = 800 \cdot l^{-2,25}$. Hierbij is P het aantal exemplaren per km^2 .

- a** Onderzoek of de volgende bewering in overeenstemming is met de formule. ‘Grote organismen leven gemiddeld verder van elkaar dan kleinere.’
- b** Van een diersoort is de populatiedichtheid 1350.
Bereken de gemiddelde lengte van deze diersoort in gehele cm.
- c** In een gebied met een oppervlakte van 250 km^2 leeft een kudde kariboes. Kariboes zijn gemiddeld 2,15 meter lang.
Schat het aantal kariboes in dit gebied.
- d** In een gebied van 5 km^2 leven ongeveer 160 000 exemplaren van de wandelende tak.
Schat de gemiddelde lengte van deze insectensoort in gehele cm.
- e** Met hoeveel procent neemt P af als l met 20 procent toeneemt? Rond af op gehelen.

10 Bij het varen speelt het begrip rompsnelheid een rol. De rompsnelheid is de maximaal bereikbare snelheid waarbij het schip nog onder controle is. Bij een grotere snelheid wordt het achterschip dieper in het water getrokken waardoor de vaareigenschappen afnemen. Dit verschijnsel heet planeren. De rompsnelheid v in km/uur bereken je met de vuistregel $v = 4,8\sqrt{l}$. Hierbij is l de lengte van de waterlijn van een schip in meter.



- a** Een schip met een waterlijn van 8,6 meter heeft een hogere rompsnelheid dan een schip met een waterlijn van 5,8 meter.
Hoeveel procent hoger?
- b** De waterlijn van schip I is twee keer zo lang als die van schip II.
Wat weet je van de rompsnelheid van de schepen I en II?
- c** Druk l uit in v . Rond af op vier decimalen.
- d** Wat weet je van de lengte van de waterlijn van schepen waarvan de rompsnelheid tussen de 10 en 20 km/uur ligt? Rond af op dm.

- 11** De snelheid van het geluid hangt af van de temperatuur. Bij windstil

weer wordt dit verband bij benadering gegeven door $v = 331 \sqrt{1 + \frac{T}{273}}$.

Hierin is v de snelheid van het geluid in m/s bij een temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$. Ga in deze opgave uit van windstil weer.

- a** In de twintigste eeuw varieerde de temperatuur in Nederland van $-27,4^{\circ}\text{C}$ tot en met $38,6^{\circ}\text{C}$.
Bereken het verschil van de geluidssnelheden bij deze twee temperaturen. Rond af op gehelen.
- b** Bereken de temperatuur in gehele graden Celsius in het geval de geluidssnelheid 340 m/s is.

In de atmosfeer neemt de temperatuur af volgens de formule $T = T_0 - 6,5h$. Hierin is h de hoogte in km en T_0 de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ op 0 km hoogte.

- c** Bereken de geluidssnelheid in km/uur op een hoogte van 2,5 kilometer in het geval de temperatuur 25°C is op 0 km hoogte. Rond af op gehelen.
- d** Schrijf de formule van v in de vorm $v = a\sqrt{bh + c}$ in het geval het op 2 km hoogte -1°C is. Rond zo nodig af op vier decimalen.