



6

Kansrekening

Wat leer je?

- Wat de kansdefinitie van Laplace inhoudt.
- Het verschil tussen empirische kansen en theoretische kansen.
- Wat voorwaardelijke kansen en onafhankelijke gebeurtenissen zijn.
- Het vaasmodel gebruiken bij het berekenen van kansen.
- Hoe je kansen berekent met behulp van de productregel, de somregel en de complementregel.
- Het verschil tussen pakken met en zonder terugleggen.



Beginopdracht Kansen in de rechtspraak

Een geruchtmakende rechtszaak waarin statistiek en kansrekening een grote rol speelden, was die tegen de verpleegkundige Lucia de Berk. Zij werd in 2003 veroordeeld, omdat zij meerdere moorden zou hebben gepleegd tijdens haar diensten in het ziekenhuis. Na lang in de gevangenis te hebben gezeten, werd zij in 2010 alsnog vrijgesproken. Het unieke aan deze zaak is het feit dat Lucia de Berk niet werd vrijgesproken omdat zij de dader niet was, maar omdat er überhaupt geen moorden bleken te zijn gepleegd. Bij haar veroordeling werden fouten gemaakt in het verzamelen van gegevens, het interpreteren van die gegevens en de berekeningen die op grond hiervan werden gemaakt. Hieronder ga je een situatie doorrekenen die lijkt op die van Lucia de Berk.

Omdat men zich zorgen maakt over het aantal sterfgevallen onder de patiënten van verpleegkundige Florence, worden gegevens verzameld van overlijdensgevallen onder 793 patiënten van het ziekenhuis. Het blijkt dat 8 van de 121 patiënten die door Florence verpleegd werden, zijn overleden. Van de overige 672 patiënten zijn er 25 overleden.

- De kans op overlijden van patiënten die verpleegd zijn door Florence is groter dan de kans op overlijden van de overige patiënten. Laat dit met een berekening zien.

Er kan onderscheid gemaakt worden tussen patiënten met een hoog risico en patiënten met een laag risico op overlijden.

Van de 121 patiënten van Florence waren er 72 met een hoog risico. Van de 8 sterfgevallen bij Florence vielen er 7 in de groep met een hoog risico. Onder de overige 672 patiënten waren er 63 met een hoog risico. Van de 25 sterfgevallen in deze groep kwamen er 8 uit de groep met een hoog risico.

- Voor de patiënten met een hoog risico geldt het volgende. De kans op overlijden van patiënten die verpleegd zijn door Florence is kleiner dan de kans op overlijden van de overige patiënten. Laat dit met een berekening zien.

Op grond van de voorgaande berekeningen zou je kunnen denken dat de verhoogde kans op overlijden van een patiënt verpleegd door Florence veroorzaakt wordt door de patiënten met een laag risico. Dit blijkt echter niet het geval.

- Voor de patiënten met een laag risico geldt het volgende. De kans op overlijden van patiënten die verpleegd zijn door Florence is kleiner dan de kans op overlijden van de overige patiënten. Laat dit met een berekening zien.

Je hebt hier te maken met een paradox.

- Beschrijf de paradox en licht toe hoe deze kan ontstaan.

Een paradox is een schijnbare tegenstelling. De paradox in deze opdracht is een voorbeeld van Simpsons paradox.

Voorkennis Combinatoriek

Theorie A Permutaties, combinaties en herhalingen

Een permutatie is een rangschikking. Dat betekent dat de volgorde van belang is en dat herhalingen niet zijn toegestaan.

Kies je uit de zes letters A, B, C, D, E en F twee letters waarbij de volgorde van belang is en herhalingen niet zijn toegestaan, dan heb je te maken met een permutatie van 2 uit 6.

Het aantal permutaties van 2 uit 6 is gelijk aan $6 \cdot 5$.

Het aantal permutaties van 6 dingen is gelijk aan $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Dit wordt genoteerd als $6!$

De GR heeft opties waarmee je faculteiten en aantallen permutaties kunt berekenen.

- Op de TI krijg je ! en nPr in het math-KANS-menu of via de functietoets f2.
- Op de Casio krijg je ! en nPr in het OPTN-PROB-menu.
- Op de HP krijg je Factorieel en Permutatie in het werksetmenu  Wisk. Kies vervolgens Kans.

Ook bij aantallen combinaties zijn herhalingen niet toegestaan, maar, in tegenstelling tot permutaties, is bij combinaties de volgorde niet van belang.

Dus bij de keuze van twee letters uit de zes letters A, B, C, D, E en F is de combinatie AB hetzelfde als BA.

Het aantal combinaties van 2 uit 6 wordt genoteerd als $\binom{6}{2}$.

Op de GR vind je de optie voor combinaties in hetzelfde menu als de optie voor permutaties.

Op de TI en Casio worden combinaties weergegeven met nCr.

Je krijgt $\binom{6}{2} = 15$.

Kies je twee letters uit de zes letters A, B, C, D, E en F waarbij herhalingen wel zijn toegestaan, dan zijn er $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$ mogelijkheden.

Maakt een bedrijf met de letters A, B, C, D, E en F codes van 2 of 3 letters, dan gebruik je de somregel voor de berekening van het aantal codes.

Merk op dat bij een code de volgorde van belang is, immers de code AB is een andere code dan de code BA.

We onderscheiden de volgende situaties.

- Herhalingen zijn toegestaan.
Het aantal codes is $6^2 + 6^3 = 252$.
- Herhalingen zijn niet toegestaan.
Het aantal codes is $6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 = 150$.

- 1** Een bedrijf maakt bij het coderen van zijn artikelen gebruik van de letters A, B, C, D en E.

Hoeveel codes zijn er

- a** van 3 letters als herhalingen zijn toegestaan
- b** van 4 letters als herhalingen niet zijn toegestaan
- c** van 2, 3 of 4 letters als herhalingen zijn toegestaan
- d** van hoogstens 3 letters als herhalingen niet zijn toegestaan?

- 2** Amber gooit met zeven dobbelstenen.

Hoeveel mogelijkheden zijn er om

- a** twee zessen en vijf enen te gooien
- b** geen enkele zes te gooien
- c** in totaal 41 ogen te gooien
- d** in totaal 40 ogen te gooien
- e** in totaal hoogstens 9 ogen te gooien?

- 3** Daan gooit met twee dobbelstenen.

Hoeveel mogelijkheden zijn er

- a** om in totaal minstens 9 ogen te gooien
- b** om met elke dobbelsteen evenveel ogen te gooien
- c** waarbij het product van de ogen hoogstens 6 is
- d** waarbij de som van de ogen even is?

6.1 Kansen

- 01** De familie Aalbers speelt een spel met twee dobbelstenen. Sonja is aan de beurt. Ze wil graag minstens 10 ogen gooien, want dan heeft ze gewonnen. Gooit ze echter 8 ogen, dan moet ze 15 plaatsen terug. Welke gebeurtenis heeft de grootste kans? Waarom?



Theorie A Kansdefinitie van Laplace

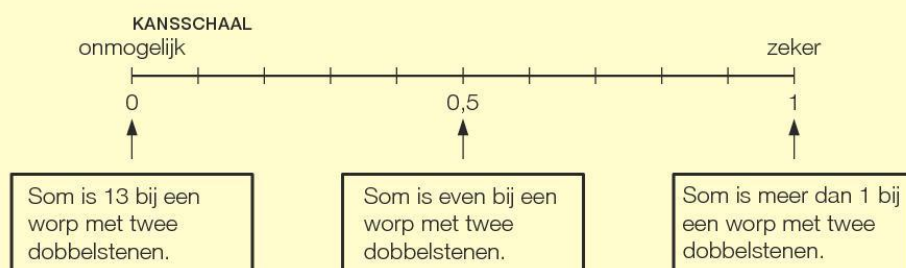
Martijn gooit met een rode en een groene dobbelsteen. In het rooster hiernaast zijn alle mogelijke uitkomsten terug te vinden. Eén van de uitkomsten is .

Je ziet dat er in totaal $6 \cdot 6 = 36$ uitkomsten mogelijk zijn. Bij de gebeurtenis 'som is 5' horen vier uitkomsten. Bij de gebeurtenis 'som is 10' horen drie uitkomsten. De kans op 'som is 10' is dus kleiner dan de kans op 'som is 5'.

In het dagelijks leven worden kansen vaak weergegeven met een percentage, bijvoorbeeld 60%. In de kansrekening noteert men meestal deze kans als 0,6 of $\frac{3}{5}$. Kansen zijn altijd minstens 0 en hoogstens 1.

	SOM					
6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

figuur 6.1



figuur 6.2

De kans om bij het gooien met twee dobbelstenen 'som is 5' te gooien, bereken je als volgt.

In totaal zijn er 36 uitkomsten mogelijk. Van deze 36 uitkomsten zijn er

4 gunstig. De kans op 'som is 5' is gelijk aan $\frac{4}{36}$.

Notatie: $P(\text{som is 5}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Om de kans op een gebeurtenis te berekenen, deel je het aantal **gunstige uitkomsten** door het aantal mogelijke uitkomsten.

Je gebruikt dan de **kansdefinitie van Laplace**.

De letter P komt van 'probabilitas', het Latijnse woord voor kans.

De kansdefinitie van Laplace

Bij een kansexperiment met uitkomsten die alle even waarschijnlijk zijn, is de kans op een gebeurtenis G gelijk aan

$$P(G) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}.$$

Bij opgaven met een dobbelsteen gaan we ervan uit dat alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn, dus dat de dobbelsteen eerlijk is.

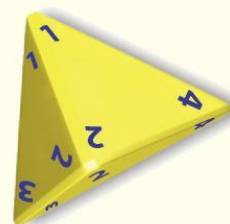
Om de kansdefinitie van Laplace toe te passen, is het belangrijk een goed overzicht te hebben van alle mogelijke uitkomsten. Het maken van een rooster kan daarbij van pas komen.

Voorbeeld

Fien gooit met een gewone dobbelsteen en met een viervlaksdobbelsteen. Met een viervlaksdobbelsteen kun je 1, 2, 3 of 4 gooien.

Bereken de kans dat

- a ze met beide stenen evenveel gooit
- b de som minstens 8 is
- c het product hoogstens 4 is.



Aanpak

Maak een 4×6 -rooster met alle mogelijke uitkomsten. Geef de gunstige uitkomsten aan.

Uitwerking

- a $P(\text{beide evenveel}) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
- b $P(\text{som minstens } 8) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
- c $P(\text{product hoogstens } 4) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

4				a b	b	b
3	c		a		b	b
2	c	a c				b
1	a c	c	c	c		
	1	2	3	4	5	6

a beide evenveel
b som minstens 8
c product hoogstens 4



R2 Harm laat de schijf van figuur 6.3 ronddraaien. Nadat de schijf is uitgedraaid, wijst de pijl één sector aan.

Harm zegt: 'Er zijn vijf uitkomsten mogelijk, dus de kans dat de pijl 3 aanwijst, is $\frac{1}{5}$.'

- a Wat is er mis met de redenering van Harm?
- b Geef de kans dat de pijl 3 aanwijst.



figuur 6.3

- 3** Dorien gooit met twee dobbelstenen, een rode en een groene.
Bereken de kans dat
- a de som van de ogen meer dan 10 is
 - b de som van de ogen even is
 - c Dorien met beide dobbelstenen hetzelfde aantal ogen gooit
 - d het aantal ogen met de rode dobbelsteen hoger is dan met de groene
 - e het verschil van de ogen 2 is.

- 4** Bas gooit met twee dobbelstenen.
Bereken de kans op de gebeurtenis
- a het verschil van de aantallen ogen is minder dan 2
 - b het product van de ogen is 12
 - c het product van de ogen is minder dan 30.

- 5** Floor gooit met een achthoeksdobbelsteen en met een vierhoeksdobbelsteen. Op de zijvlakken van de achthoeksdobbelsteen staan de cijfers 1 tot en met 8. Bereken de kans op de gebeurtenis
- a de aantallen zijn gelijk
 - b de som is 8
 - c het product is minstens 16
 - d het verschil is 1.



- E6** Arjan, Bo en Caro hebben schaatstraining. Tijdens deze training rijden ze rondjes van 400 meter, in totaal elk 10 kilometer. Ze doen steeds 45 seconden over een rondje. Ze schaatsen samen, maar Bo begint een ronde later dan Arjan, en Caro begint 3 ronden later dan Bo. Bereken de kans dat ze tijdens deze training op een willekeurig moment alle drie aan het schaatsen zijn.

GESCHIEDENIS

Pierre-Simon de Laplace

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) werd geboren in een klein dorpje in Normandië, waar zijn vader herenboer was. Tijdens zijn studie theologie raakte hij geïnteresseerd in de wiskunde. Vanaf 1789 hield hij zich voornamelijk bezig met de mechanica en de kansrekening. Zijn in 1812 verschenen monumentale werk 'Théorie analytique des probabilités' is een inleiding in de waarschijnlijkheidstheorie.

Hierin wees hij erop dat voor het toepassen van zijn definitie

kans = $\frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}$ uitgegaan moet worden van

even waarschijnlijke uitkomsten, zoals bij de zes uitkomsten van een dobbelsteen.



07



Anouk gooit met drie dobbelstenen, een gele, een rode en een blauwe.

- Hoeveel mogelijkheden zijn er om met de drie dobbelstenen hetzelfde aantal ogen te gooien?
- Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er in totaal mogelijk?
- Bereken de kans om met de drie dobbelstenen hetzelfde aantal ogen te gooien.

Theorie B Samengestelde kansexperimenten

Het gooien met een dobbelsteen is een voorbeeld van een **kansexperiment**. Kenmerkend voor een kansexperiment is dat de uitkomst niet van tevoren vastligt.

Voorbeelden van **samengestelde kansexperimenten** zijn

- het gooien met een dobbelsteen en een geldstuk
- het gooien met twee dobbelstenen
- het gooien met drie geldstukken
- het meedoen met drie loten in een loterij.

Bij het gooien met drie dobbelstenen bereken je $P(\text{som} = 17)$ als volgt:

- het aantal mogelijke uitkomsten is $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
- het aantal gunstige uitkomsten is drie, namelijk 665, 656 en 566
- $P(\text{som} = 17) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

Met $P(\text{som} = 17) = \frac{1}{72}$ is de kans **exact** berekend. Bij een exact antwoord rond je niet af.

Het aantal gunstige uitkomsten bij een samengesteld kansexperiment met dobbelstenen of geldstukken vind je bij

- twee kansexperimenten met een rooster
- drie of meer experimenten met systematisch noteren en/of handig tellen.

Voorbeeld

Bereken exact de kans dat je bij het gooien met vijf geldstukken drie of vier keer kop gooit.

Uitwerking

Het aantal mogelijke uitkomsten is $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$.

Gunstige uitkomsten zijn $\text{kkkmm} \quad \binom{5}{3} = 10 \text{ keer}$
 $\text{kkkkm} \quad \binom{5}{4} = 5 \text{ keer}$

Er zijn $10 + 5 = 15$ gunstige uitkomsten.

$$P(\text{drie of vier keer kop}) = \frac{15}{32}$$

R8 In opgave 7 hadden de dobbelstenen drie verschillende kleuren, maar in de theorie daarna werd er niets vermeld over de kleuren van de dobbelstenen.



Zou de uitkomst van 7c anders zijn geweest als de drie dobbelstenen dezelfde kleur hadden gehad?

9 Justin gooit met vier geldstukken.



Bereken exact de kans dat hij

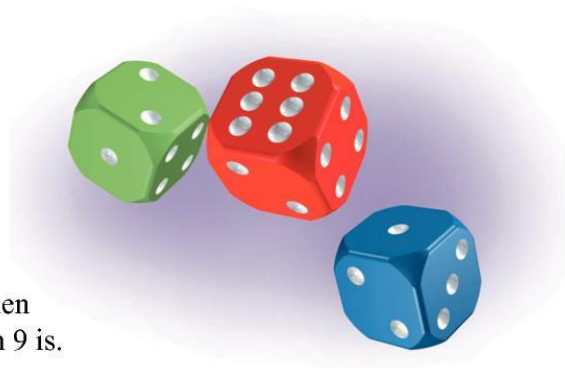
- a vier keer hetzelfde gooit
- b één keer kop gooit
- c meer dan één keer munt gooit.

10 Mark gooit met drie dobbelstenen.



Bereken exact de kans dat

- a de som van de ogen 5 is
- b de som van de ogen minder dan 7 is
- c hij met minstens één van de dobbelstenen 3 ogen gooit en dat de som van de ogen 9 is.



A11 Bereken exact de kans dat je met zes geldstukken



- a vijf keer kop gooit
- b drie keer munt gooit
- c minder dan drie keer kop gooit.

A12 In een doos zitten 15 briefjes die genummerd zijn van 1 tot en met 15.



Isa pakt drie briefjes uit de doos.

Bereken exact de kans dat de som van de getallen op deze drie briefjes gelijk is aan 15.

Terugblik

Kansen berekenen

Volgens de kansdefinitie van Laplace is

$$P(\text{gebeurtenis}) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}.$$

Je mag deze regel alleen gebruiken als alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.

Bij een verkeerslicht zijn de uitkomsten rood, oranje en groen niet even waarschijnlijk, want het verkeerslicht staat korter op oranje dan op rood en groen. Dus $P(\text{oranje})$ is niet gelijk aan $\frac{1}{3}$.

Bij het gooien met een dobbelsteen is elk van de zes uitkomsten even waarschijnlijk. Bij de gebeurtenis 'meer dan 4 ogen' zijn de uitkomsten

$$5 \text{ en } 6 \text{ ogen gunstig. Dus } P(\text{meer dan 4 ogen}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Hiermee is de kans exact berekend. Bij een exact antwoord mag je niet benaderen.

Een rooster maken bij twee experimenten

Bij het gooien met twee dobbelstenen, het gooien met twee geldstukken en het draaien van twee kanstolletjes krijg je een overzicht van alle mogelijke uitkomsten door een rooster te maken.

In het rooster hiernaast is af te lezen dat bij het gooien met

$$\text{twee viervlaksdobbelstenen } P(\text{som minstens 5}) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

4	*	*	*	*
3		*	*	*
2			*	*
1				*
	1	2	3	4

* som minstens 5

Samengestelde kansexperimenten bestaande uit meer dan twee experimenten

Heb je met meer dan twee experimenten te maken, dan bereken je kansen als volgt.

- Bereken het aantal mogelijke uitkomsten.
- Tel het aantal gunstige uitkomsten door deze systematisch te noteren en/of handig te tellen.
- Deel het aantal gunstige door het aantal mogelijke uitkomsten.

Zo krijg je bij een worp met drie dobbelstenen en de gebeurtenis 'som van de ogen is 15':

- het aantal mogelijke uitkomsten is $6^3 = 216$
- het aantal gunstige uitkomsten is 10, namelijk
663 3 keer
654 3! = 6 keer
555 1 keer

$$P(\text{som} = 15) = \frac{3 + 6 + 1}{216} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

663, 636, 366
654, 645, 564, 546, 456, 465
555

6.2 Empirische kansen

013 Marieke gooit met een dobbelsteen. Ze vraagt zich af of de dobbelsteen eerlijk is. Daarom gooit zij 300 keer met de dobbelsteen en telt het aantal keren zes ogen. Ze gooit 30 keer een zes.



- Wat is op basis van dit experiment de kans om zes ogen te gooien?
- Wat denk je, is deze dobbelsteen eerlijk? Licht toe.

014 Margo gooit eerst 50 keer met een punaise, dan 100 keer, dan 150 keer, enzovoort. Bij elke serie telt ze hoe vaak de punt van de punaise omhoog ligt. Zie de tabel.



PUNT VAN DE PUNAISE OMHOOG

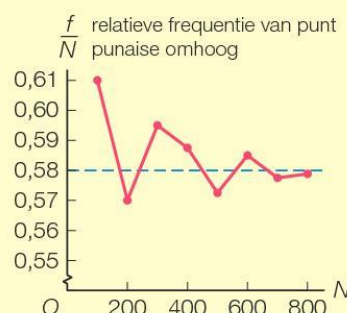
aantal keer gooien N	50	100	150	200	250	300	500	1000
frequentie f	31	61	89	114	141	174	282	579
relatieve frequentie $\frac{f}{N}$	0,62							

- Vul de tabel in. Rond af op twee decimalen.
- Geef een schatting van $P(\text{punt van punaise ligt omhoog})$.
- Volgens Bart zijn er twee mogelijkheden bij het gooien met een punaise: de punt ligt omhoog of de punt ligt niet omhoog. Daarom is volgens Bart $P(\text{punt ligt omhoog}) = \frac{1}{2}$. Geef commentaar.

Theorie A Empirische en theoretische kansen

Bij het gooien van een punaise zijn twee uitkomsten mogelijk, maar deze zijn niet even waarschijnlijk. Je kunt de kans op de gebeurtenis 'punt omhoog' schatten door het experiment een groot aantal keren uit te voeren en de relatieve frequentie van de gebeurtenis 'punt omhoog' te berekenen. De relatieve frequentie bereken je door de frequentie van de gebeurtenis te delen door de totale frequentie.

De ervaring leert dat deze relatieve frequentie een goede schatting geeft van de kans als je het experiment heel vaak uitvoert. Dit is een gevolg van de **wet van de grote aantallen**.



figuur 6.4

Door een kansexperiment heel vaak uit te voeren, komt de relatieve frequentie van een gebeurtenis dicht bij de kans op die gebeurtenis te liggen.

Bij de punaise volgt uit de wet van de grote aantallen dat $P(\text{punt ligt omhoog}) \approx 0,58$.

Wil je de kans weten dat bij een geboorte in Nederland een meisje ter wereld komt, dan gebruik je bijvoorbeeld gegevens van het CBS. In 2017 werden in Nederland 169 836 kinderen geboren, waarvan 82 677 meisjes. De kans op een meisje is dus $\frac{82\,677}{169\,836} \approx 0,487$.

Je schat hier de kans op grond van gegevens uit het verleden. Je gaat er hierbij van uit dat de gegevens van 2017 ook voor de jaren daarna een goed beeld van de werkelijkheid geven.

$P(\text{meisje bij geboorte})$ en $P(\text{punaise met punt omhoog})$ zijn voorbeelden van **empirische kansen**. Empirisch betekent ‘op ervaring gegrond’. Empirische kansen krijg je door een groot aantal waarnemingen te gebruiken.

Empirische kansen bereken je met relatieve frequenties.

Bij veel kansexperimenten kun je van tevoren zeggen wat de kans op een gebeurtenis is.

Zo is $P(\text{meer dan 4 ogen})$ bij een worp met een dobbelsteen gelijk aan $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Je gebruikt hierbij de kansdefinitie van Laplace. Zulke kansen heten **theoretische kansen**, ook wel **a priori** (= vooraf) **kansen** genoemd.

Een derde soort kans is de **subjectieve kans**. Wat is bijvoorbeeld de kans dat het wereldrecord verspringen vóór het jaar 2030 boven de 9,20 meter ligt? Iedereen kan daar zijn eigen mening over hebben, maar het is onmogelijk deze kans te berekenen.

Bij theoretische kansen ga je ervan uit dat kansexperimenten eerlijk verlopen. Dat houdt bijvoorbeeld in dat de gebruikte dobbelsteen eerlijk is. Maar een volmaakte dobbelsteen bestaat niet. Je werkt dus met een wiskundig model.

Voorbeeld

Zie de tabel.

BEVOLKINGSOPBOUW VAN AMSTERDAM IN 2018

leeftijd	0-14	15-24	25-44	45-64	65+	totaal
aantal	126 007	109 354	304 288	208 818	105 580	854 047

Bereken de kans dat in 2018 een willekeurig gekozen inwoner van Amsterdam

- a 25 jaar of ouder was
- b jonger dan 15 of 65-plusser was.

Uitwerking

a $P(25 \text{ jaar of ouder}) = \frac{304\,288 + 208\,818 + 105\,580}{854\,047} \approx 0,724$

b $P(\text{jonger dan 15 of 65+}) = \frac{126\,007 + 105\,580}{854\,047} \approx 0,271$

R15


In welke van de volgende situaties gaat het om theoretische en in welke om empirische kansen?

De kans dat

- a een Nederlander linkshandig is
- b Annemiek bij een loterij een prijs wint
- c een trein te laat vertrekt uit Zutphen
- d je bij een worp met drie dobbelstenen in totaal negen ogen gooit
- e een Nederlander bloedgroep A heeft.

16


Hemelvaartsdag valt altijd op een donderdag. De vroegste datum waarop Hemelvaartsdag kan vallen is 30 april en de laatst mogelijke datum is 3 juni. Het weer op Hemelvaartsdag kan erg uiteenlopen. De hoogste maximumtemperatuur is gemeten op 27 mei 1954. Het werd toen maar liefst 29,2 °C. De laagste maximumtemperatuur was op 13 mei 2010. De temperatuur kwam toen niet hoger dan 9,2 °C. Ook de neerslaghoeveelheden lopen erg uiteen, evenals het aantal uren zonneshijn.



In de tabel zie je gegevens over het weer op Hemelvaartsdag in de periode van 1910 tot en met 2018. De gegevens zijn afkomstig van het KNMI in De Bilt. Je leest af dat er 32 Hemelvaartsdagen waren met een maximumtemperatuur van minstens 20 °C.

HET WEER OP HEMELVAARTSDAG

max. temperatuur	freq.	neerslag	freq.	uren zon	freq.
lager dan 10 °C	2	0 tot 0,1 mm	50	0 tot 1	18
10 tot 15 °C	32	0,1 tot 1,0 mm	16	1 tot 5	30
15 tot 20 °C	43	1,0 tot 5,0 mm	25	5 tot 10	36
20 °C of hoger	32	5,0 mm of meer	18	10 of meer	25
	109		109		109

Neem aan dat deze gegevens ook gelden voor een willekeurige Hemelvaartsdag in de toekomst. Rond in deze opgave af op twee decimalen.

Bereken de kans dat op een Hemelvaartsdag

- a de maximumtemperatuur minstens 15 °C is
- b minder dan 5,0 mm regen valt
- c de zon minstens één uur schijnt.

Het CBS heeft onderzoek gedaan naar korte vakanties van Nederlanders naar het buitenland. In de kruistabel staan de aantallen in duizendtallen.

KORTE VAKANTIES VAN NEDERLANDERS NAAR HET BUITENLAND (×1000)

	België	Frankrijk	Duitsland	overige landen	totaal
georganiseerd	699	365	813	756	2633
niet-georganiseerd	411	135	437	84	1067
	1110	500	1250	840	3700

- De kans dat een georganiseerde reis naar België ging, is ongeveer 0,265. Toon dit aan.
- Bereken de kans dat een niet-georganiseerde reis naar België ging.
- Volgens een onderzoeker was België bij de niet-georganiseerde reizen een populairdere bestemming dan bij de georganiseerde reizen. Hoe komt de onderzoeker tot deze conclusie?

Theorie B Voorwaardelijke kansen

Aan 96 volwassen Nederlanders is gevraagd of zij vinden dat Nederland de EU moet verlaten. In de kruistabel zijn de antwoorden verwerkt, waarbij onderscheid is gemaakt naar leeftijd.

VERLATEN EU

	voor	tegen	geen mening	
jongeren	7	14	3	24
dertigers	11	18	5	34
veertigplussers	5	25	8	38
	23	57	16	96

Uitgaande van deze tabel zijn heel wat kansberekeningen te maken. Zo is

- $P(\text{ondervraagde is dertiger}) = \frac{34}{96} \approx 0,354$
- $P(\text{ondervraagde is voor verlaten}) = \frac{23}{96} \approx 0,240$.

Maar niet altijd moet je delen door de totale frequentie 96 van de gehele groep. Soms is de vraagstelling zo, dat je moet kiezen uit een *beperkte groep*. Beperk je je tot de dertigers, dan deel je door 34.

Dus $P(\text{ondervraagde die dertiger is, is voor verlaten}) = \frac{11}{34} \approx 0,324$.

Het gaat hier om de kans dat een ondervraagde voor verlaten is *onder de voorwaarde* dat hij een dertiger is. Zo'n kans, waarbij je je tot een deelgroep beperkt, heet een **voorwaardelijke kans**.

Je kunt deze voorwaardelijke kans ook noteren als $P(\text{voor verlaten onder de voorwaarde dertiger})$.

Hoeveel procent van de dertigers is voor verlaten? Antwoord:

$$\frac{11}{34} \times 100\% \approx 32,4\%$$

**Bij een voorwaardelijke kans beperk je je tot een deelgroep.
Je deelt dan door de frequentie van die deelgroep.**

Om te voorkomen dat we in elke opgave moeten vermelden op hoeveel decimalen je de gevraagde kansen moet afronden, maken we hierover een afspraak. Staat er niets vermeld, dan rond je de kans af op drie decimalen. Een uitzondering is als de kans door afronden op drie decimalen 0,000 of 1,000 wordt. Zo is bijvoorbeeld de kans om in de Staatsloterij de jackpot te winnen, ongeveer gelijk aan 0,00000016. In dit geval ronden we de kans af op zeven of acht decimalen, omdat 0,000 geen zinnig antwoord is.

Afspraak

Rond kansen af op drie decimalen, tenzij

- anders vermeld
- de kans door afronden op drie decimalen 0,000 of 1,000 wordt.

Voorbeeld

Hieronder zie je nog eens de tabel van het onderzoek naar het verlaten van de EU.

VERLATEN EU

	voor	tegen	geen mening	
jongeren	7	14	3	24
dertigers	11	18	5	34
veertigplussers	5	25	8	38
	23	57	16	96

Bereken de kans dat een willekeurig gekozen ondervraagde

- a** veertigplusser is **c** veertigplusser voor verlaten is
b die voor verlaten, veertigplusser is **d** veertigplusser is en voor verlaten is.

Uitwerking

$$\mathbf{a} \quad P(\text{veertigplusser}) = \frac{38}{96} \approx 0,396$$

b $P(\text{ondervraagde die voor verlaten is, is veertigplusser}) = \frac{5}{23} \approx 0,217$

Deel door het aantal personen dat voor verlaten is.

c $P(\text{veertigplusser is voor verlaten}) = \frac{5}{38} \approx 0,132$

Deel door het aantal veertigplussers.

d $P(\text{veertigplusser en voor verlaten}) = \frac{5}{96} \approx 0,052$

Bij EN deel je het aantal dat aan twee kenmerken voldoet door de frequentie van de hele groep.

Deel door het totale aantal ondervraagden, want het gaat om de ondervraagden uit de gehele groep die aan beide kenmerken voldoen.

- R18** Dat je met een voorwaardelijke kans te maken hebt, kun je vaak zien aan het gebruik van het woord *die*. Maar ook zonder het woord *die* kan er sprake zijn van een voorwaardelijke kans.
Formuleer vraag c van het voorbeeld met gebruik van het woordje *die*.

- 19** Zie het voorbeeld.
Bereken de kans dat een willekeurige ondervraagde
- a een jongere is
 - b jongere geen mening heeft
 - c jongere is en geen mening heeft
 - d die geen mening heeft, jongere is.

leeftijd	levenden
30	983 378
35	976 843
40	967 252
45	952 699
50	930 601
55	896 701
60	845 134
65	768 465
70	659 273
75	514 596
80	344 752
85	180 300
90	63 017
95	11 472
100	726

- 20** Hiernaast zie je een sterftetabel van de Nederlandse bevolking.
Er is uitgegaan van 1 000 000 baby's. Je ziet dat van de 1 000 000 baby's er 983 378 de leeftijd van 30 jaar halen.
Bereken de kans dat
- a een dertigjarige zijn zestigste verjaardag haalt
 - b een dertigjarige voor zijn veertigste sterft
 - c een tachtigjarige minstens 95 jaar wordt
 - d een pasgeboren baby voor zijn dertigste sterft
 - e een zestigjarige wel zijn zeventigste, maar niet zijn tachtigste verjaardag haalt.

- A21** De gemeenteraad van Vierhouten wil weten hoeveel auto's dagelijks het kruispunt in het centrum passeren. Op een dinsdag in mei is niet alleen geteld hoeveel auto's het kruispunt passeerden, maar ook uit welke richting ze kwamen en in welke richting ze hun weg vervolgden. De resultaten staan in de kruistabel.

		van				
		N	O	Z	W	
naar	N	0	877	51	408	1336
	O	1053	1	234	1682	2970
	Z	53	154	0	491	698
	W	982	1711	830	0	3523
		2088	2743	1115	2581	8527

- Bereken de kans dat een willekeurig gekozen auto
- a uit het westen kwam
 - b verder ging naar het oosten
 - c die uit het noorden kwam, verder ging naar het westen
 - d rechtdoor ging
 - e linksaf sloeg
 - f uit het westen verder ging naar het noorden.

Op een andere dinsdag in mei passeerden 7520 auto's het kruispunt.
g Hoeveel auto's daarvan, verwacht je, kwamen uit het westen?

- R22** Bij een onderzoek zijn van 83 treinpassagiers enkele reisgegevens genoteerd.

	afgelegde afstand in km				
	0 tot 20	20 tot 40	40 tot 60	60 of meer	
met abonnement	6	9	12	10	37
zonder abonnement	8	11	12	15	46
	14	20	24	25	83

Bij de tabel is een aantal kansen berekend. De antwoorden staan hieronder. Bedenk bij elk van deze kansen een passende gebeurtenis. Noteer je antwoord in de vorm $P(\dots)$.

- a** $\frac{14}{83}$ **b** $\frac{9}{20}$ **c** $\frac{11}{46}$

- E23** * Aan een onderzoek naar de betrouwbaarheid van stemherkenning doen 1200 personen mee. Aan de hand van de stem wordt door een computer bepaald of een persoon al dan niet toestemming krijgt een ruimte te betreden. Van deze groep zijn de gegevens van 800 personen zo geprogrammeerd, dat ze gerechtigd zijn de ruimte te betreden. De andere 400 personen zijn daartoe niet gerechtigd.
- Van de personen die de ruimte mogen betreden, wordt 3,5% de toestemming ten onrechte geweigerd. Van de personen die de ruimte niet mogen betreden, wordt 8,5% toch toegelaten.
- Uit de groep van 1200 personen wordt willekeurig één persoon gekozen. Deze persoon blijkt niet toegelaten te zijn.
- Bereken de kans dat deze persoon ten onrechte geweigerd is.

- O24** * Op een havo/vwo-school zitten 1120 leerlingen, waarvan 504 jongens. De havo-afdeling telt 600 leerlingen en de vwo-afdeling 520.
- a** Hoeveel jongens verwacht je op basis van deze gegevens op het vwo? En hoeveel op de havo?
- Er blijken 210 jongens op het vwo te zitten.
- b** Toon met een berekening aan dat voor deze school geldt dat de kans dat een jongen op het vwo zit, niet gelijk is aan de kans dat een willekeurige leerling op het vwo zit.

Theorie C Onafhankelijke gebeurtenissen

In opgave 24 was de kans dat een jongen op het vwo zit niet gelijk aan de kans dat een willekeurige leerling op het vwo zit. Dus de kans dat een leerling op het vwo zit, is afhankelijk van de vraag of deze leerling een jongen is.

De tabel hiernaast geeft informatie over een groep van 60 leerlingen.

De kans dat een willekeurig gekozen leerling uit deze groep blauwe ogen heeft, is gelijk aan $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$.

Er is bij deze tabel iets bijzonders aan de hand. Immers ook

$$P(\text{jongen heeft blauwe ogen}) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \text{ en}$$

$$P(\text{meisje heeft blauwe ogen}) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}.$$

Je kunt zeggen dat het geslacht geen enkele invloed heeft op het al dan niet blauwe ogen hebben. We noemen daarom de gebeurtenissen 'leerling is jongen' en 'leerling heeft blauwe ogen' **onafhankelijk**. Ook de gebeurtenissen 'leerling is meisje' en 'leerling heeft blauwe ogen' zijn onafhankelijk.

Merk op dat

$$P(\text{'leerling heeft blauwe ogen' onder voorwaarde 'leerling is jongen'}) = P(\text{'leerling heeft blauwe ogen'}).$$

Gebeurtenissen die niet onafhankelijk zijn, heten **afhankelijk**.

	blauwe ogen	geen blauwe ogen	
jongen	15	5	20
meisje	30	10	40
	45	15	60

A en B zijn onafhankelijke gebeurtenissen betekent dat $P(A \text{ onder voorwaarde } B) = P(A)$.

Voorbeeld

Van een groep van 200 personen blijkt iedereen óf bloedgroep AB óf bloedgroep 0 te hebben.

Van elk van deze personen is de resusfactor bekend.

Toon aan dat de gebeurtenissen 'bloedgroep AB' en 'resusfactor positief' afhankelijk zijn.

	AB	0	
Rh+	15	155	170
Rh-	5	25	30
	20	180	200

Aanpak

Laat zien dat $P(\text{bloedgroep AB onder voorwaarde Rh+})$ niet gelijk is aan $P(\text{bloedgroep AB})$.

Uitwerking

$$\left. \begin{aligned} P(\text{bloedgroep AB}) &= \frac{20}{200} = 0,1 \\ P(\text{bloedgroep AB onder voorwaarde Rh+}) &= \frac{15}{170} \approx 0,088 \end{aligned} \right\} 0,1 \neq \frac{15}{170}$$

De gebeurtenissen 'bloedgroep AB' en 'Rh+' zijn dus afhankelijk.

R25

In de theorie staat



A en B zijn onafhankelijke gebeurtenissen betekent dat
 $P(A \text{ onder voorwaarde } B) = P(A)$.

Ook geldt

A en B zijn onafhankelijke gebeurtenissen betekent dat
 $P(B \text{ onder voorwaarde } A) = P(B)$.

Laat zien dat dit in de tabel van de theorie ook geldt voor de
 gebeurtenissen 'leerling is jongen' en 'leerling heeft blauwe ogen'.

26

Toon met een berekening aan dat in het voorbeeld ook de gebeurtenissen
 'bloedgroep 0' en 'resusfactor negatief' afhankelijk zijn.

A27

Van een groep van 2000 studenten is nagegaan of ze een bijbaan hebben.
 Daarbij is onderscheid gemaakt tussen thuis- en uitwonende studenten.
 Zie de tabel.

	thuiswonend	uitwonend	
bijbaan	1120	480	1600
geen bijbaan	230	170	400
	1350	650	2000

Toon aan dat het hebben van een bijbaan en uitwonend zijn afhankelijke
 gebeurtenissen zijn.

E28

Op een dag staan er 300 fietsen in een bewaakte fietsenstalling. Daarvan
 zijn er 120 van abonneementhouders. Van de fietsen zijn er 160 elektrisch.
 De gebeurtenissen 'fiets is elektrisch' en 'fiets is van abonneementhouder'
 zijn onafhankelijk.

Bereken de kans dat een willekeurige fiets niet elektrisch is en niet van
 een abonneementhouder.

Terugblik

Empirische kansen

Een empirische kans is gebaseerd op een aantal waarnemingen.

Je schat een empirische kans met de relatieve frequentie, dat is
$$\frac{\text{frequentie gebeurtenis}}{\text{totale frequentie}}.$$

Je kunt een empirische kans schatten door

- een kansexperiment een groot aantal keer uit te voeren, bijvoorbeeld als je de kans wilt weten dat bij een worp met een luciferdoosje deze op een strijklak terecht komt
- gebruik te maken van statistische gegevens, bijvoorbeeld als je de kans wilt weten dat een trein meer dan vijf minuten te laat aankomt.

Uit de wet van de grote aantallen volgt dat de relatieve frequentie een goede schatting van de kans geeft als je het experiment heel vaak uitvoert.

Voorwaardelijke kansen

In de kruistabel hiernaast zijn van de leerlingen van een klas twee kenmerken verwerkt, namelijk geslacht en leeftijd.

Let bij kansberekeningen die bij een tabel horen goed op of je met de totale groep te maken hebt of met een deelgroep. Bij een deelgroep heb je te maken met een voorwaardelijke kans.

Zo is $P(\text{leerling van 15 jaar is een jongen}) = \frac{9}{14}.$

Je beperkt je tot de deelgroep van de 15-jarigen.

	leeftijd				
	14	15	16	17	
jongen	2	9	0	1	12
meisje	6	5	6	1	18
	8	14	6	2	30

Onafhankelijke gebeurtenissen

De gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk als $P(A \text{ onder de voorwaarde } B) = P(A).$

Zo is in de tabel hiernaast $P(\text{jongen}) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ en

$P(\text{jongen onder de voorwaarde 14 jaar}) = \frac{19}{76} = \frac{1}{4}.$

Dus bij de gegeven tabel zijn de gebeurtenissen 'leerling is jongen' en 'leerling is 14 jaar' onafhankelijk.

	leeftijd		
	14	15	
jongen	19	6	25
meisje	57	18	75
	76	24	100

6.3 Het vaasmodel en de productregel

029



Uit een groep van 15 leerlingen worden er willekeurig drie gekozen om samen een cadeau te kopen voor een pasgeboren baby van een docent.

- Volgens Levi zijn er $15 \cdot 15 \cdot 15$ drietallen mogelijk.
Welke fout maakt hij?
- Volgens Sasha zijn er $15 \cdot 14 \cdot 13$ drietallen mogelijk.
Welke fout maakt zij?
- Hoeveel drietallen zijn er mogelijk?



Theorie A Kansen en combinaties

In opgave 29 waren bij het kiezen van de drie leerlingen herhalingen niet toegestaan en was de volgorde niet van belang. Daarbij horen combinaties.

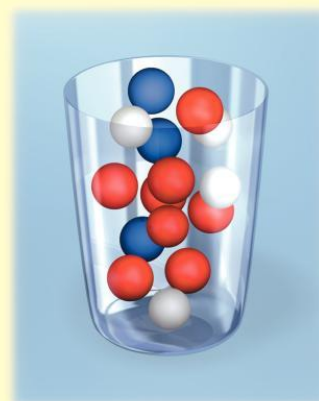
In een vaas zitten acht rode, vier witte en drie blauwe knikkers. We vragen ons af wat de kans is dat je bij het pakken van acht knikkers vijf rode en drie witte knikkers pakt. Hierbij gebruiken we de kansdefinitie van Laplace en hebben we met combinaties te maken.

- Het aantal mogelijke uitkomsten is het aantal manieren om 8 knikkers uit de totaal $8 + 4 + 3 = 15$ knikkers te pakken.

Dat kan op $\binom{15}{8}$ manieren.

- Het aantal gunstige uitkomsten is het aantal manieren om 5 rode uit de 8 rode EN 3 witte uit de 4 witte knikkers te pakken. Dat kan op $\binom{8}{5} \cdot \binom{4}{3}$ manieren.

- De gevraagde kans is dus $P(5 \text{ rode en } 3 \text{ witte}) = \frac{\binom{8}{5} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{15}{8}} \approx 0,035$.



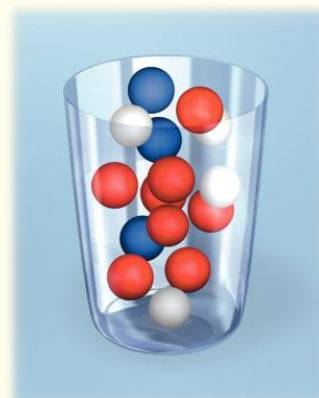
Voorbeeld

In een vaas zitten acht rode, vier witte en drie blauwe knikkers.

Joep pakt vijf knikkers uit de vaas.

Bereken de kans dat Joep

- a één rode, twee witte en twee blauwe knikkers pakt
- b geen rode knikkers pakt
- c drie rode knikkers pakt.



Aanpak

Het aantal mogelijke uitkomsten is $\binom{15}{5}$.

Het aantal gunstige uitkomsten is het aantal manieren om

- a 1 rode uit 8 rode EN 2 witte uit 4 witte EN 2 blauwe uit 3 blauwe knikkers te pakken, dat is $\binom{8}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2}$
- b de 5 knikkers uit de $4 + 3 = 7$ niet-rode te pakken, dat is $\binom{7}{5}$
- c 3 rode uit de 8 rode EN dus 2 niet-rode uit de $4 + 3 = 7$ niet-rode te pakken, dat is $\binom{8}{3} \cdot \binom{7}{2}$.

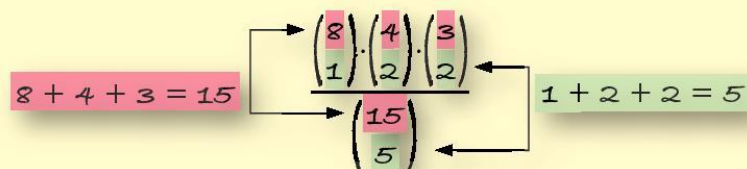
Uitwerking

a $P(1 \text{ rode, } 2 \text{ witte en } 2 \text{ blauwe}) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{15}{5}} \approx 0,048$

b $P(\text{geen rode knikkers}) = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{15}{5}} \approx 0,007$

c $P(3 \text{ rode}) = \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{15}{5}} \approx 0,392$

Merk bij vraag a van het voorbeeld de volgende samenhang op.



R30
☐⊗*

De zojuist genoemde samenhang lijkt bij vraag b van het voorbeeld te ontbreken.

Noteer de kans van vraag b zo, dat ook hier deze samenhang zichtbaar wordt.

31
☐⊗

In een vaas zitten zeven rode, acht witte en zes groene knikkers.

Carmen pakt zeven knikkers uit de vaas.

Bereken de kans dat zij

- a drie rode, twee witte en twee groene knikkers pakt
- b geen groene knikkers pakt
- c twee rode en vijf witte knikkers pakt
- d twee witte knikkers pakt.

32
☐⊗*

In een vaas zitten 18 rode, 12 blauwe en 32 witte knikkers.

Vincent pakt zes knikkers uit de vaas.

Bereken de kans op

- a drie witte en drie blauwe
- b geen witte knikkers
- c vier witte knikkers
- d één rode knikker.

033
☐⊗*

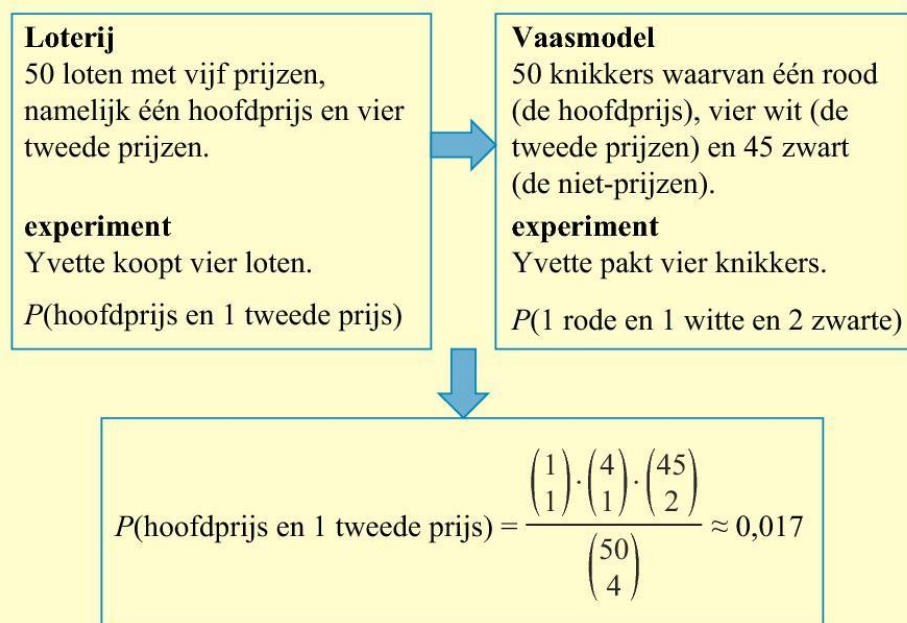
Op een fruitschaal liggen vijf appels, vier peren en zes sinaasappels.

Doris pakt willekeurig drie stuks fruit van de schaal.

Bereken de kans dat ze één appel, één peer en één sinaasappel pakt.

Theorie B Het vaasmodel

Bij veel kansberekeningen kan het handig zijn het kansexperiment om te zetten in het pakken van knikkers uit een vaas. Je maakt dan een **vaasmodel** bij het probleem. Zie het volgende schema.



Voorbeeld

In een loterij zijn 80 loten verkocht. Er zijn vijf boekenbonnen te winnen en een fiets. Eva heeft vier loten gekocht.

Bereken de kans dat Eva een boekenbon winst en verder niets.

Uitwerking

$$P(1 \text{ boekenbon en verder niets}) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{74}{3}}{\binom{80}{4}} \approx 0,205$$

R34

Zie het voorbeeld.



Wat is de samenstelling van de vaas met knikkers?

Bij lastige opgaven schrijf je de samenstelling van de vaas op.

35



Bij een loterij zijn 40 loten verkocht. Er zijn drie eerste prijzen en zeven tweede prijzen. Monique koopt drie loten en Barbara koopt er vier.

Bereken de kans dat

- a Monique één prijs wint
- b Barbara twee tweede prijzen wint
- c geen van beiden een prijs wint
- d elk lot van Barbara een prijs oplevert.

36



Texas Hold'em is een variant van het kaartspel poker.

Iedere speler krijgt in de eerste ronde twee kaarten. Er wordt gespeeld met een spel van 52 kaarten, waarvan de vier azen de beste zijn. Jimmie en zes van zijn vrienden spelen samen.

- a Bereken de kans dat Jimmie in de eerste ronde twee azen krijgt.
- b Bereken de kans dat alle azen in de eerste ronde worden uitgedeeld.



E37

*

We kijken nog eens naar de situatie van opgave 36.

Jimmie krijgt in de eerste ronde twee azen in zijn hand.

- a Bereken de kans dat geen van de andere spelers ook een aas heeft.
- b Anne is een van de vrienden die meespeelt.

Bereken de kans dat Anne de twee andere azen heeft.

A38



Op een vliegveld zijn zes balies beschikbaar voor het afhandelen van vluchten naar Porto. Bij elke balie staat een rij van vijf personen. Bij de wachtenden zijn er vijf met een inchecktijd van meer dan vier minuten. Bereken de kans dat drie van deze wachtenden in de rij bij balie 2 staan.

A39



Een partij van 500 appels wordt verpakt in 20 dozen van elk 25 stuks.

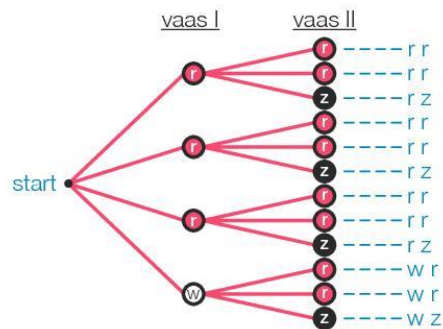
Bij deze 500 appels zijn er tien met een rotte plek. Isa koopt een doos.

Bereken de kans dat alle appels in de doos gaaf zijn.

O40


Gegeven zijn twee vazen met knikkers. In vaas I zitten drie rode en één witte. In vaas II zitten twee rode en één zwarte.

- Maxe pakt uit vaas I een knikker.
Waarom is $P(\text{rode uit I}) = \frac{3}{4}$?
- Charlotte pakt uit vaas II een knikker.
Hoe groot is $P(\text{rode uit II})$?
- Asmin pakt uit elke vaas één knikker.
Hoeveel mogelijke uitkomsten volgen uit het boomdiagram? Hoeveel keer komt de uitkomst rr voor?
Bereken de kans dat Asmin twee rode knikkers pakt.
- Controleer dat je de kans van vraag c ook krijgt door de kansen uit de vragen a en b te vermenigvuldigen.



figuur 6.5

Theorie C Kansbomen

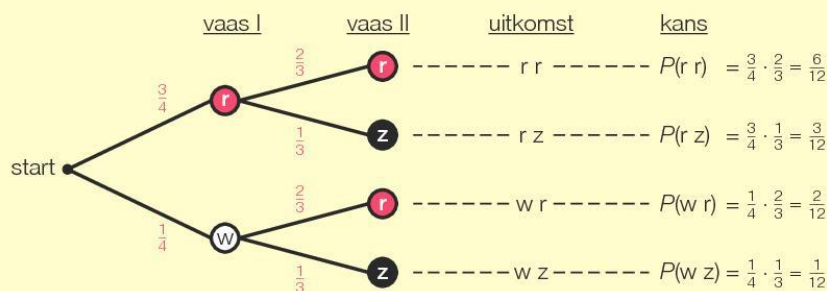
In opgave 40 heb je te maken met een samengesteld kansexperiment: uit elk van twee vazen wordt een knikker gepakt.

Omdat deze twee experimenten elkaars uitkomsten op geen enkele wijze beïnvloeden, zijn de experimenten **onafhankelijk** van elkaar.

In opgave 40 is $P(rr)$ berekend met behulp van een boomdiagram.

Omdat door de vele vertakkingen een boomdiagram al snel onoverzichtelijk wordt, passen we een vereenvoudiging toe.

- Pak eerst een knikker uit vaas I. Omdat je alleen de mogelijkheden r en w hebt, zijn er vanaf de start slechts twee takken getekend. Bij elke tak staat de bijbehorende kans.
- Pak vervolgens een knikker uit vaas II. Je hebt alleen de mogelijkheden r met kans $\frac{2}{3}$ en z met kans $\frac{1}{3}$.



figuur 6.6 Merk op dat de som van de kansen 1 is.

Zo ontstaat het boomdiagram hierboven. Een boomdiagram met kansen bij de takken heet een **kansboom**.

Bij het doorlopen van een kansboom vermenigvuldig je de kansen die je tegenkomt. Zo is $P(wz) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ en $P(rz) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.

Werkschema: berekenen van kansen bij samengestelde kansexperimenten

- 1 Maak in gedachten (een gedeelte van) een kansboom.
- 2 Vermenigvuldig de kansen die je tegenkomt bij het doorlopen van de kansboom.

Dat je bij het doorlopen van een kansboom de kansen moet vermenigvuldigen is een gevolg van de **productregel voor onafhankelijke kansexperimenten**.

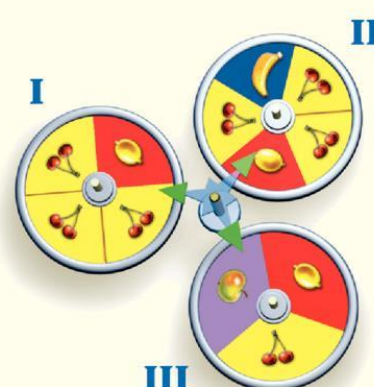
Voor de gebeurtenis G_1 bij het ene kansexperiment en de gebeurtenis G_2 bij het andere kansexperiment geldt $P(G_1 \text{ en } G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2)$.

Voorbeeld

De schijven in figuur 6.7 draaien onafhankelijk van elkaar. Nadat de schijven tot stilstand zijn gekomen, wijst elke pijl een sector aan.

Bereken exact de kans op

- a drie keer kersen
- b een appel, een banaan en een citroen
- c geen enkele citroen.



figuur 6.7

Uitwerking

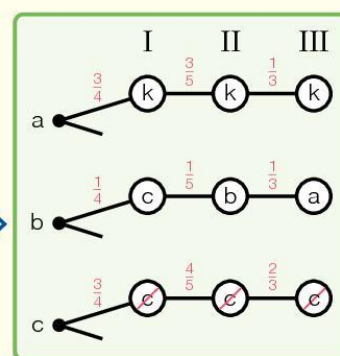
a $P(\text{drie keer kersen}) = P(k \ k \ k) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$

b $P(\text{een appel, een banaan en een citroen}) =$
 $P(c \ b \ a) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60}$

c $P(\cancel{c} \ \cancel{c} \ \cancel{c}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

$\cancel{c}$ betekent geen citroen.
 Bij schijf I is $P(\cancel{c}) = \frac{3}{4}$.

Bij elk probleem hoort een andere kansboom.



R41


Je mag kansen alleen vermenigvuldigen als de experimenten onafhankelijk zijn. Ga bij de volgende situaties na of hier sprake van is. Bereken de kans als er sprake is van onafhankelijke kansexperimenten.

- a** Wereldwijd is de kans 0,02 dat een willekeurige persoon blauwe ogen heeft.
 Bereken de kans dat in een gezin beide kinderen blauwe ogen hebben.
- b** De kans dat het morgen regent in Breda is 0,7. De kans dat het morgen regent in Sydney (Australië) is 0,2.
 Bereken de kans dat het morgen zowel in Breda als in Sydney regent.
- c** De kans dat het morgen regent in Breda is 0,7. De kans dat het morgen regent in Antwerpen is 0,7.
 Bereken de kans dat het morgen zowel in Breda als in Antwerpen regent.

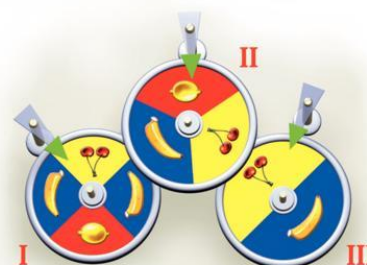


42


- In vaas I zitten twee rode, vijf witte en drie blauwe knikkers.
 In vaas II zitten twee witte knikkers, twee blauwe en één groene.
 Lucas pakt uit beide vazen één knikker.
 Bereken exact de kans op
- a** twee witte knikkers
 - b** een blauwe en een rode knikker
 - c** geen enkele blauwe knikker
 - d** geen enkele rode knikker.

43


- Nadat de schijven in figuur 6.8 tot stilstand zijn gekomen, wijzen de pijlen elk één sector aan. Bereken exact.
- a** $P(\text{drie bananen})$
 - b** $P(\text{geen kersen})$
 - c** $P(\text{twee citroenen en één banaan})$
 - d** $P(\text{drie citroenen})$



figuur 6.8

A44 Levi gooit met een viervlaksdobbelsteen, een gewone dobbelsteen en een achtvlaksdobbelsteen.

Bereken de kans dat hij

- a** in totaal 18 gooit
- b** met geen enkele steen 3 gooit
- c** met elke steen hoogstens 4 gooit
- d** met elke steen een drievoud gooit.

A45 Jeanine en Karsten spelen eerst een spelletje schaak, dan gaan ze een potje dammen en vervolgens spelen ze een keer Stratego. Jeanine wint bij schaken 65% van de spelletjes, bij dammen 45% en bij Stratego is deze kans 50%.

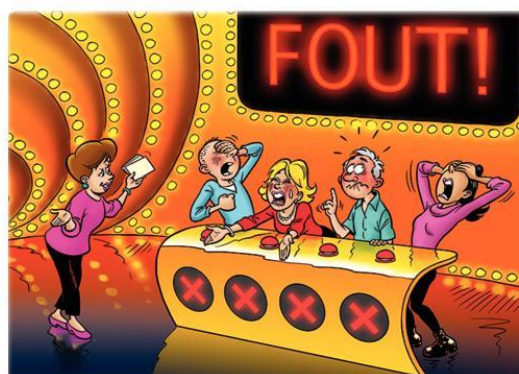
Bereken de kans dat Jeanine

- a** alle drie de spelletjes wint
- b** alleen bij het schaken wint.

Jeanine wint 65% van de spelletjes, dus de kans dat ze een spelletje wint is 0,65 en de kans dat ze een spelletje niet wint is 0,35.

E46 Bij een spelshow zijn 100 kandidaten, waarvan er vier door loting worden gekozen om een spel te spelen. Zij moeten als team drie opdrachten doen. Als deze alle drie lukken, dan winnen de spelers ieder 5000 euro. Bij de eerste opdracht is de kans dat deze lukt 0,8, bij de tweede is dat 0,6 en bij de laatste opdracht is deze kans 0,4.

- a** Onno is een van de honderd kandidaten. Bereken de kans dat hij 5000 euro wint.
- b** Van de 100 kandidaten zijn er 60 vrouw. Bereken de kans dat er twee mannen en twee vrouwen worden gekozen om mee te doen en dat zij bij de laatste opdracht de prijs mislopen.



Terugblik

Knikkers pakken uit een vaas

Bij kansberekeningen die gaan over het pakken van knikkers uit een vaas gebruik je combinaties.

Pak je vijf knikkers uit een vaas met 52 blauwe, zes rode en twee witte knikkers, dan is

$$P(3 \text{ blauwe, 1 rode en 1 witte}) = \frac{\binom{52}{3} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{60}{5}} \approx 0,049.$$

$$\text{Verder is } P(3 \text{ blauwe}) = \frac{\binom{52}{3} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{60}{5}} \approx 0,113. \quad \leftarrow \dots \quad \boxed{3 \text{ blauwe, dus ook 2 niet-blauwe}}$$

Het vaasmodel

probleem Een loterij met 100 loten heeft één eerste prijs, twee tweede prijzen en vijf derde prijzen.

Twan koopt vier loten.

Wat is de kans dat Twan één prijs wint?

vaasmodel In een vaas zitten 100 knikkers, waarvan er acht rood zijn (de 1 + 2 + 5 prijzen) en 92 wit (de niet-prijzen).

Pak vier knikkers uit de vaas.

$$\text{antwoord} \quad P(\text{één prijs}) = P(1 \text{ rode en 3 witte knikkers}) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{92}{3}}{\binom{100}{4}} \approx 0,256$$

De productregel

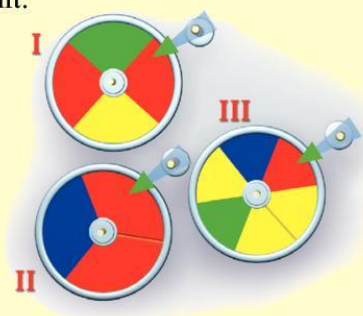
Voor onafhankelijke kansexperimenten geldt de productregel.

Is G_1 een gebeurtenis bij het ene experiment en G_2 bij het andere experiment, dan is $P(G_1 \text{ en } G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2)$.

Bij het berekenen van kansen bij samengestelde kansexperimenten maak je in gedachten (een gedeelte van) een kansboom. Bij het doorlopen van de kansboom vermenigvuldig je de kansen die je tegenkomt.

Zo is bij de schijven hiernaast

$$P(\text{geen enkele keer rood}) = P(\text{r r r}) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{72} = \frac{5}{36}.$$



6.4 De somregel

047

Eddy gooit met twee dobbelstenen.

- Bereken exact $P(\text{som is } 3)$, $P(\text{som is } 4)$ en $P(\text{som is } 3 \text{ of som is } 4)$.
- Is $P(\text{som is } 3 \text{ of som is } 4) = P(\text{som is } 3) + P(\text{som is } 4)$?
- Onderzoek of $P(\text{som is } 4 \text{ of product is } 4)$ gelijk is aan $P(\text{som is } 4) + P(\text{product is } 4)$.

In de wiskunde bedoelen we met het woordje of: of het een, of het ander of allebei.

Theorie A De somregel voor kansen

Bij het gooien met twee dobbelstenen is $P(\text{som is } 2 \text{ of som is } 4) = P(\text{som is } 2) + P(\text{som is } 4)$. Dit is een voorbeeld van de **somregel**.

Je mag de somregel hier toepassen, omdat de gebeurtenissen 'som is 2' en 'som is 4' geen gemeenschappelijke uitkomsten hebben.

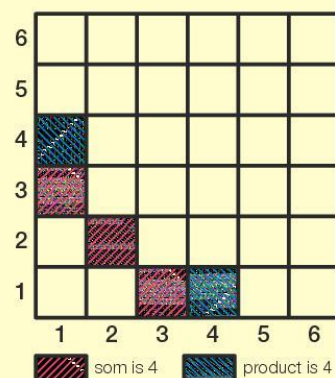
We zeggen dat de gebeurtenissen **elkaar uitsluiten**.

Hebben twee gebeurtenissen wel gemeenschappelijke uitkomsten, dan geldt de somregel niet.

Zo is $P(\text{som is } 4 \text{ of product is } 4)$ niet gelijk aan $P(\text{som is } 4) + P(\text{product is } 4)$, want de gebeurtenissen 'som is 4' en 'product is 4' hebben de uitkomst 2 2 gemeenschappelijk.

Voor $P(\text{som is } 4 \text{ of product is } 4)$ moet je de gunstige uitkomsten tellen.

Je krijgt $P(\text{som is } 4 \text{ of product is } 4) = \frac{5}{36}$.



figuur 6.9

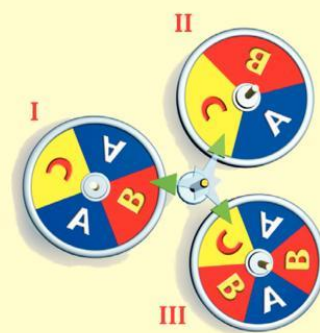
Voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen G_1 en G_2 geldt de somregel: $P(G_1 \text{ of } G_2) = P(G_1) + P(G_2)$.

De drie schijven in figuur 6.10 draaien onafhankelijk van elkaar.

Om de kans op drie gelijke letters te berekenen, gebruik je de somregel in combinatie met de productregel. Immers $P(\text{drie gelijke letters}) = P(AAA) + P(BBB) + P(CCC) =$

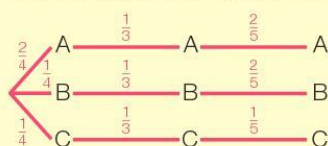
$$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{60} + \frac{2}{60} + \frac{1}{60} = \frac{7}{60}.$$

Bij deze berekening maak je in gedachten een deel van een kansboom.



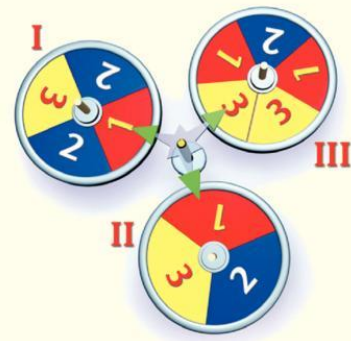
figuur 6.10

kansboom bij $P(\text{drie gelijke letters})$



Voorbeeld

Niels laat de schijven in figuur 6.11 één keer draaien. De schijven draaien onafhankelijk van elkaar. Nadat de schijven zijn uitgedraaid, wijst elke pijl één sector aan. Bereken de kans dat de som van de cijfers 4 is.



figuur 6.11

Aanpak

Bedenk 'som is 4' houdt in 112 of 121 of 211.

Uitwerking

$$P(\text{som is 4}) = P(112) + P(121) + P(211) =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \approx 0,117$$

Ook bij opgaven met het vaasmodel gebruik je vaak de somregel.

Voorbeeld

Bij een loterij zijn alle 80 loten verkocht. Er zijn zes prijzen. Martine heeft vier loten gekocht. Bereken de kans dat Martine meer dan twee prijzen wint.

Aanpak

Meer dan twee prijzen betekent hier drie of vier prijzen. Pas de somregel toe.

Uitwerking

$$P(\text{meer dan 2 prijzen}) = P(3 \text{ prijzen}) + P(4 \text{ prijzen}) =$$

$$\frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{74}{1}}{\binom{80}{4}} + \frac{\binom{6}{4}}{\binom{80}{4}} \approx 0,001$$

48

Zie het voorbeeld met de schijven.



- Bereken de kans dat één 3 wordt aangewezen.
- Bereken de kans geen enkele blauwe sector wordt aangewezen.

Zie het voorbeeld over de loterij.

$$\text{Loes berekent de kans als volgt: } \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{74}{1} + \binom{6}{4}}{\binom{80}{4}}.$$

- Waarom mag dat? Wat is het voordeel hiervan?

De GR van Loes geeft als antwoord 9.452572744E-4.

- Licht toe dat dit afgerond op drie decimalen gelijk is aan 0,001. Hoeveel is het antwoord afgerond op vier decimalen?

49

Rob gooit met drie dobbelstenen.



Bereken de kans dat hij

- a één vijf gooit
- b twee zessen en een drie gooit
- c met elke dobbelsteen minstens drie ogen gooit.

50

Bij een loterij zijn 80 loten verkocht. Er is een hoofdprijs van 50 euro en er zijn drie tweede prijzen van 25 euro.



Nina koopt vijf loten.

Bereken de kans dat Nina

- a minder dan twee prijzen wint
- b 50 euro wint.

51

Op weg naar huis passeert Marieke drie voetgangerslichten.



De kansen dat deze op rood staan, zijn achtereenvolgens 0,4, 0,7 en 0,2.

De voetgangerslichten werken onafhankelijk van elkaar.

Bereken de kans dat Marieke

- a drie keer kan doorlopen
- b één keer moet wachten, maar niet voor het derde voetgangerslicht.

A52



Stijn gooit met een viervlaksdobbelsteen, een gewone dobbelsteen en een achtlaksdobbelsteen.

Bereken de kans dat Stijn

- a één twee gooit
- b twee vieren gooit
- c in totaal 16 gooit.

A53



In de tabel zie je hoe ver de werknemers van de firma Adphex van hun werk af wonen. Bij een onderzoek naar de vergoeding van reiskosten worden tien personen van dit bedrijf ondervraagd.

Bereken de kans dat

- a meer dan acht ondervraagden minder dan 5 km van het bedrijf wonen
- b minder dan drie vrouwen bij het onderzoek zijn betrokken
- c er twee vrouwen bij zitten die 5 km of meer van het werk af wonen.

AFSTAND HUIS - BEDRIJF

	man	vrouw	
0 tot 5 km	18	11	29
5 tot 10 km	13	3	16
10 km of meer	6	2	8
	37	16	53

E54



Bij een spel doorloop je achtereenvolgens vijf fasen. In elke fase kun je punten verdienen. Zie de tabel hiernaast.

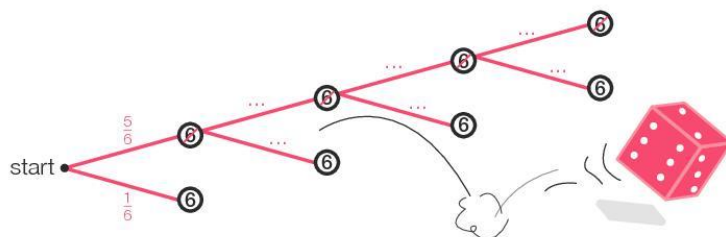
Je ziet bijvoorbeeld dat je 4 punten kunt verdienen in fase IV.

De kans hierop is 0,4. In elke fase verdien je de punten die in de tabel staan, of je verdient deze punten niet.

Bereken de kans dat je bij één keer spelen bij dit spel minstens 12 punten verdient.

fase	kans	punten
I	0,8	1
II	0,6	2
III	0,5	3
IV	0,4	4
V	0,2	5

Diana gooit vier keer met een dobbelsteen. Om de kans te berekenen dat ze geen enkele keer 6 ogen gooit, gebruikt ze de kansboom in figuur 6.12.



figuur 6.12

a Bereken de kans op geen enkele keer 6 ogen.

Huan gooit met vier dobbelstenen.

b Wat kun je zeggen van de kans dat hij geen enkele 6 gooit?

Theorie B Kansexperimenten herhalen

Het vier keer gooien met een dobbelsteen is een voorbeeld van het herhaald uitvoeren van hetzelfde kansexperiment. Ook in zo'n situatie gebruik je de productregel om kansen te berekenen.

De productregel gebruik je ook als je hetzelfde experiment twee of meer keren uitvoert.

De schijf in figuur 6.13 wordt vier keer gedraaid.

De kans op geen enkele keer kiwi is gelijk aan

$$P(\overline{k} \overline{k} \overline{k} \overline{k}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^4 \approx 0,410.$$

De kans op precies één keer kiwi is

$$P(k \overline{k} \overline{k} \overline{k}) + P(\overline{k} k \overline{k} \overline{k}) + P(\overline{k} \overline{k} k \overline{k}) + P(\overline{k} \overline{k} \overline{k} k) =$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \approx 0,410.$$

$$\text{Dus } P(\text{één keer kiwi}) = \binom{4}{1} \cdot P(k \overline{k} \overline{k} \overline{k}) = \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3.$$

De kans op twee keer kiwi is

$$P(k k \overline{k} \overline{k}) + P(k \overline{k} k \overline{k}) + P(\overline{k} k k \overline{k}) + \dots =$$

$$\binom{4}{2} \cdot P(k k \overline{k} \overline{k}) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \approx 0,154.$$



figuur 6.13

2 van de 4 keer kiwi:

$$\left. \begin{array}{l} k k \overline{k} \overline{k} \\ k \overline{k} k \overline{k} \\ \overline{k} k k \overline{k} \\ \vdots \\ \text{enz.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Het aantal rijtjes} \\ \text{met 2 keer } k \text{ en} \\ 2 \text{ keer } \overline{k} \text{ is } \binom{4}{2}. \end{array}$$

Voorbeeld

Lucas laat de schijf in figuur 6.14 acht keer draaien.

Bereken de kans dat hij

- a vijf keer 3 en drie keer 1 krijgt
- b vijf keer 2 krijgt
- c minstens zeven keer 1 krijgt.



figuur 6.14

Uitwerking

- a $P(\text{vijf keer 3 en drie keer 1}) =$

$$\binom{8}{5} \cdot P(3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \approx 0,065$$

- b $P(\text{vijf keer 2}) = \binom{8}{5} \cdot P(2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,004$

- c $P(\text{minstens zeven keer 1}) = P(\text{zeven keer 1}) + P(\text{acht keer 1}) =$

$$\binom{8}{7} \cdot P(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2) + P(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) = \binom{8}{7} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^7 \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^8 \approx 0,003$$

R56

Zie het voorbeeld.



Bereken de kans dat Lucas alleen de eerste en de laatste keer 2 krijgt.

Waarom gebruik je bij het berekenen van deze kans geen combinaties?

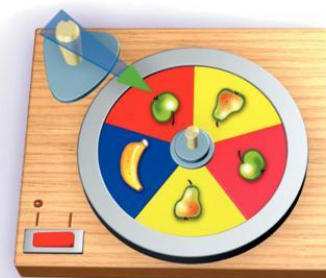
57



Puck laat de schijf in figuur 6.15 zes keer draaien.

Bereken de kans op

- a drie keer appel en drie keer peer
- b minstens vijf keer appel
- c drie keer banaan
- d geen enkele banaan.



figuur 6.15

58



Joep maakt een proefwerk dat uit 25 vierkeuzevragen bestaat.

Bij zes vragen moet hij het antwoord gokken.

Bereken de kans dat hij bij deze zes vragen

- a geen enkele keer goed gokt
- b twee keer goed gokt
- c minder dan drie keer goed gokt.

A59
□ ⊙ *

Britse wetenschappers hebben een methode ontwikkeld om uit DNA-materiaal dat afkomstig is van een man een voorspelling te doen over zijn achternaam. De kans op een juiste voorspelling is 0,4. Bij tien moordzaken is op grond van het beschikbare DNA-materiaal bekend dat de dader een man moet zijn.

Bereken de kans dat in

- a** drie zaken de achternaam juist voorspeld is
- b** minder dan drie zaken de achternaam juist voorspeld is.



A60
*

Daan gooit acht keer met twee dobbelstenen.

Bereken de kans dat

- a** de som van de ogen drie keer minder dan 5 is
- b** de som van de ogen meer dan vijf keer meer dan 7 is.

Terugblik

De somregel

Bij het berekenen van kansen geldt bij elkaar uitsluitende gebeurtenissen de somregel.

Zo geldt bij het gooien met een dobbelsteen dat

$$P(3 \text{ ogen of } 5 \text{ ogen}) = P(3 \text{ ogen}) + P(5 \text{ ogen}).$$

Als iemand drie loten koopt bij een loterij met vijftig loten waarvan vijf een prijs opleveren, dan bereken je de kans op hoogstens één prijs als volgt.

$$P(\text{hoogstens 1 prijs}) = P(0 \text{ prijzen}) + P(1 \text{ prijs})$$

$$= \frac{\binom{45}{3}}{\binom{50}{3}} + \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{45}{2}}{\binom{50}{3}} \approx 0,977$$

Kansexperimenten herhalen

Het zes keer gooien met een dobbelsteen en het vier keer draaien van de schijf in de figuur hiernaast zijn

voorbeelden van het herhalen van een kansexperiment.

Om hierbij kansen te berekenen gebruik je de productregel.

Bij het vier keer draaien van de schijf is

- $P(\text{geen enkele keer blauw}) = P(\text{b b b b}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,482$

- $P(\text{twee keer blauw en twee keer rood}) =$

$$P(\text{b b r r}) + P(\text{b r b r}) + P(\text{r b b r}) + \dots =$$

$$\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{mogelijkheden}}$$

$$\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \approx 0,019$$

- $P(\text{minder dan twee keer rood}) =$

$$P(\text{geen enkele keer rood}) + P(\text{één keer rood}) =$$

$$P(\text{r r r r}) + \binom{4}{1} \cdot P(\text{r r r r}) = \left(\frac{4}{6}\right)^4 + \binom{4}{1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^3 \approx 0,593$$



6.5 De complementregel

061
□ ⊗ *

In een vaas zitten twaalf rode en tien witte knikkers.

Daan pakt willekeurig vier knikkers uit de vaas.

Bereken de kans dat hij

a vier witte knikkers pakt

b minder dan vier witte knikkers pakt.

Theorie A Het vaasmodel en de complementregel

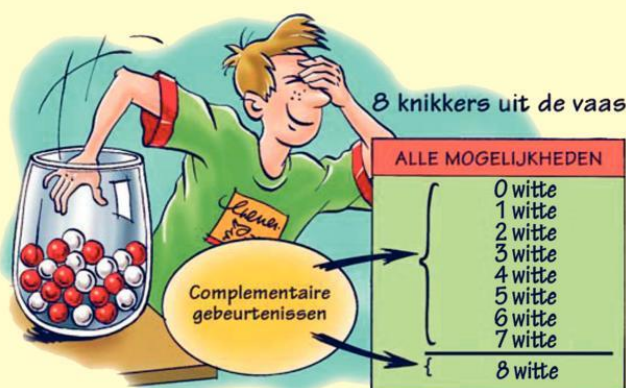
Bij het pakken van acht knikkers uit de vaas van opgave 61 is de kans op minder dan acht witte knikkers gelijk aan

$P(0 \text{ witte}) + P(1 \text{ witte}) + P(2 \text{ witte}) + \dots + P(7 \text{ witte})$.

In plaats van deze acht kansen apart te berekenen en daarna op te tellen, kun je je heel wat rekenwerk besparen door te bedenken dat de som van de kansen van alle mogelijke uitkomsten gelijk is aan 1. Hieruit volgt dat $P(\text{minder dan 8 witte}) = 1 - P(8 \text{ witte})$.

Dit is een voorbeeld van de **complementregel**.

Het complement van een gebeurtenis bestaat uit alle uitkomsten die niet tot de gebeurtenis behoren.



Omdat $P(\text{gebeurtenis}) + P(\text{complement-gebeurtenis}) = 1$, geldt de complementregel. Volgens deze regel is

$$P(\text{gebeurtenis}) = 1 - P(\text{complement-gebeurtenis})$$

Het woord complement komt van complementeren: het toevoegen van het gedeelte dat ontbreekt om iets volledig te maken.

In de figuur hiernaast zie je een gebeurtenis en haar complement-gebeurtenis. Samen geven ze alle mogelijke uitkomsten.



Het is belangrijk om bij kansberekeningen op een verstandige wijze de complementregel te gebruiken. Dat kan rekenwerk besparen. Zie het volgende schema.

Pak 6 knikkers uit een vaas met 10 rode en 20 witte knikkers.			
gebeurtenis	met somregel	complement-gebeurtenis	complement-regel handig?
minder dan 6 witte	0, 1, 2, 3, 4 of 5 witte	6 witte	ja
minder dan 2 witte	0 of 1 witte	2, 3, 4, 5 of 6 witte	nee
meer dan 1 witte	2, 3, 4, 5 of 6 witte	0 of 1 witte	ja
minstens 1 witte	1, 2, 3, 4, 5 of 6 witte	0 witte	ja
hoogstens 1 witte	0 of 1 witte	2, 3, 4, 5 of 6 witte	nee

Voorbeeld

Bij een televisieshow wordt de finalist voor tien deuren geplaatst. Achter drie van die deuren bevindt zich een waardevolle prijs. Achter de andere zeven deuren ligt een lege envelop. De finalist mag vier deuren openen. Bereken de kans dat er minstens één prijs de deur uitgaat.

Aanpak

Maak een vaasmodel met tien knikkers (de deuren), waarvan drie rode (de prijzen) en zeven witte knikkers (de lege enveloppen). Pak vier knikkers uit de vaas (de te openen deuren) en bereken de kans op minstens één rode knikker.

Uitwerking

$$P(\text{minstens één prijs}) = 1 - P(\text{geen prijs}) = 1 - \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} \approx 0,833$$



Een kansexperiment bestaat uit het pakken van vijf knikkers uit een vaas met acht rode, zes witte en twaalf groene knikkers.

Bij het gebruik van de complementregel kan er gemakkelijk iets fout gaan. Wat is er fout aan de volgende beweringen?

- a $P(\text{geen groene}) = 1 - P(\text{allemaal groene})$
- b $P(\text{gelijke kleuren}) = 1 - P(\text{verschillende kleuren})$
- c $P(\text{meer dan twee rode}) = 1 - P(\text{minder dan twee rode})$
- d $P(\text{hoogstens drie witte}) = 1 - P(\text{minstens drie witte})$

Vul in.

- e $P(\text{minstens één rode}) = 1 - P(\dots)$
- f $P(\text{hoogstens vier witte}) = 1 - P(\dots)$
- g $P(\text{niet vier rode}) = 1 - P(\dots)$

63

In een vaas zitten vier gele, drie groene en vijf blauwe knikkers. Olivier pakt er drie uit.

Bereken de kans dat

- a er minstens één groene bij is
- b er hoogstens twee blauwe bij zijn
- c ze alle drie van kleur verschillen
- d ze alle drie dezelfde kleur hebben.

Komt in de omschrijving van een gebeurtenis 'minstens', 'hoogstens', 'niet', 'meer dan' of 'minder dan' voor, kijk dan of de complementregel je rekenwerk kan besparen.

A64

Van de 28 leerlingen van 4 vwo A van het Zuidland College in Akkerdam zijn er acht 14 jaar, vijftien 15 jaar en vijf 16 jaar. Van de leerlingen van 4 vwo A wonen er zeventien in Akkerdam: van de 14-jarigen zijn dat er zes en van de 15-jarigen zijn dat er tien. De docent wiskunde verdeelt de klas in groepjes van vier leerlingen voor het maken van een praktische opdracht. Hij kiest daartoe willekeurig telkens vier leerlingen.

Bereken de kans dat in het eerst gekozen groepje

- a uitsluitend 15-jarigen zitten
- b niet de 15-jarige Floris uit Akkerdam zit
- c minstens één leerling uit Akkerdam zit
- d hoogstens twee leerlingen van 15 jaar zitten, die bovendien in Akkerdam wonen.

E65

Bij een kaartspel wordt gespeeld met 32 kaarten. Er zijn vier soorten kaarten: klaveren (zwart), schoppen (zwart), harten (rood) en ruiten (rood). Van elke soort wordt gespeeld met de 7, 8, 9, 10, boer, vrouw, heer en aas. We trekken acht kaarten uit het spel.

Bereken de kans op

- a meer dan vier kaarten van één soort
- b vier klaverkaarten en minstens één schoppenkaart
- c minstens één schoppenkaart en geen enkele hartenkaart.

**O66**

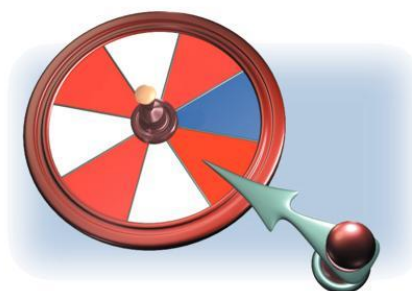
Maud laat de schijf in figuur 6.16 vier keer draaien.

De kans dat ze twee keer rood krijgt is 0,375.

- a Toon dit aan.

De kans dat ze geen enkele keer rood krijgt is 0,0625.

- b Toon dit aan.
- c Bereken de kans dat ze minstens één keer rood krijgt.



figuur 6.16

Theorie B De productregel en de complementregel

De complementregel gebruik je soms samen met de productregel. In de volgende situatie heb je te maken met een samengesteld kansexperiment.

Daan komt op weg van school naar huis drie verkeerslichten tegen die onafhankelijk van elkaar werken. De kansen dat deze verkeerslichten op rood staan zijn achtereenvolgens 0,2, 0,3 en 0,25.

Bij het berekenen van de kans dat Daan minstens één keer moet wachten gebruik je de complementregel in combinatie met de productregel.

$P(\text{Daan hoeft geen enkele keer te wachten}) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,75 = 0,42$, dus

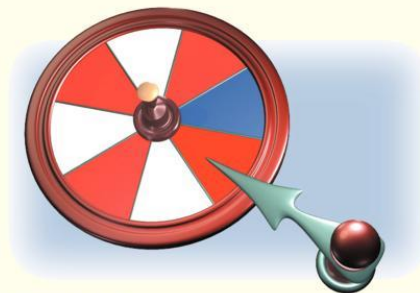
$P(\text{Daan moet minstens één keer wachten}) = 1 - P(\text{Daan hoeft geen enkele keer te wachten}) = 1 - 0,42 = 0,58$.

Voorbeeld

Annelie laat de schijf in figuur 6.17 zes keer draaien.

Bereken de kans dat ze

- a twee keer wit krijgt
- b minstens één keer blauw krijgt
- c hoogstens vier keer rood krijgt.



figuur 6.17

Uitwerking

a $P(\text{twee keer wit}) = \binom{6}{2} \cdot P(\text{w w } \cancel{\text{w}} \cancel{\text{w}} \cancel{\text{w}} \cancel{\text{w}}) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^4 \approx 0,322$

b $P(\text{minstens één keer blauw}) = 1 - P(\text{geen enkele keer blauw}) =$
 $1 - P(\cancel{\text{b}} \cancel{\text{b}} \cancel{\text{b}} \cancel{\text{b}} \cancel{\text{b}} \cancel{\text{b}}) = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^6 \approx 0,551$

c $P(\text{hoogstens vier keer rood}) = 1 - P(\text{vijf keer rood}) - P(\text{zes keer rood}) =$
 $1 - \binom{6}{5} \cdot P(\text{r r r r r } \cancel{\text{r}}) - P(\text{r r r r r r}) = 1 - \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^5 \cdot \frac{4}{8} - \left(\frac{4}{8}\right)^6 \approx 0,891$

67

Raul laat de schijf in figuur 6.18 vijf keer draaien.

Bereken de kans dat hij

- a minstens één keer een appel krijgt
- b drie appels en twee peren krijgt
- c twee bananen krijgt
- d hoogstens drie bananen krijgt.



figuur 6.18

68

Dianne laat de schijf in figuur 6.18 twee keer draaien.



a Toon aan dat de kans op een appel en een banaan gelijk is aan $\frac{4}{25}$.

Bereken de kans op

- b geen enkele banaan
- c minstens één appel.

69



In de gemeenschappelijke ruimte van een studentenhuys zijn vier rookmelders aangebracht. De kans dat rookmelder I bij brand werkt, is 0,95. Voor melder II is dat 0,85, voor melder III is dat 0,88 en voor melder IV is dat 0,77. De rookmelders werken onafhankelijk van elkaar.

In de gemeenschappelijke ruimte breekt brand uit.

Bereken de kans dat minstens één rookmelder afgaat.



A70



In Nederland is 1 op de 12 mannen kleurenblind. In een winkelcentrum wordt een enquête gehouden onder mannen.

Bereken de kans dat

- a van de eerste vijf ondervraagde mannen geen enkele kleurenblind is
- b minstens één van de eerste tien ondervraagde mannen kleurenblind is
- c één van de eerste zes ondervraagde mannen kleurenblind is.

A71



In ons land vinden regelmatig vogeltellingen plaats. Op grond van deze tellingen wordt voor elke vogelsoort de *trefkans* vastgesteld.

De trefkans is de kans dat je tijdens een telling in een willekeurige tuin in Nederland de soort aantreft.

Ga er in deze opgave van uit dat de trefkansen onafhankelijk zijn.

Tijdens een vogeltelling verzamelt Nienke de resultaten van de tellingen in 15 tuinen.

Bereken de kans dat in

- a hoogstens 13 tuinen een koolmees is aangetroffen
- b minstens twee tuinen een ekster is waargenomen
- c geen enkele tuin een vink is voorgekomen
- d geen enkele tuin zowel een koolmees als een vink is aangetroffen.

vogelsoort	koolmees	vink	ekster
trefkans	0,76	0,28	0,17

E72



Een fabrikant verpakt zijn zakken chips in dozen van veertig stuks. Om het merk te promoten, zitten in iedere doos drie zakken met een bioscoopbon. Een supermarktmedewerker pakt vijf van deze dozen en haalt uit elk van deze dozen twee zakken chips. Bereken de kans dat hij minstens één zak met een bioscoopbon erin heeft.

Terugblik

De complementregel

Komt in de omschrijving van een gebeurtenis 'minstens', 'hoogstens', 'meer dan', 'minder dan' of 'niet' voor, dan kan de complementregel je rekenwerk besparen.

$$P(\text{gebeurtenis}) = 1 - P(\text{complement-gebeurtenis})$$

Het vaasmodel en de complementregel

In een loterij met 100 loten zijn vier prijzen te winnen.

Justin koopt vijf loten en Anjali koopt er zeven.

- De kans dat Justin minstens één prijs wint, bereken je met de complementregel.

$$P(\text{minstens één prijs}) = 1 - P(\text{geen prijs}) = 1 - \frac{\binom{96}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 0,188$$

- De kans dat Justin hoogstens één prijs wint, bereken je met de somregel. Immers $P(\text{hoogstens één prijs}) = P(\text{geen prijs of één prijs})$.

$$P(\text{hoogstens één prijs}) = P(\text{geen prijs}) + P(\text{één prijs}) =$$

$$\frac{\binom{96}{5}}{\binom{100}{5}} + \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{96}{4}}{\binom{100}{5}} \approx 0,988.$$

- De kans dat Anjali meer dan één prijs wint, is

$$P(\text{meer dan één prijs}) = 1 - P(\text{geen prijs}) - P(\text{één prijs}) =$$

$$1 - \frac{\binom{96}{7}}{\binom{100}{7}} - \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{96}{6}}{\binom{100}{7}} \approx 0,024.$$

De productregel en de complementregel

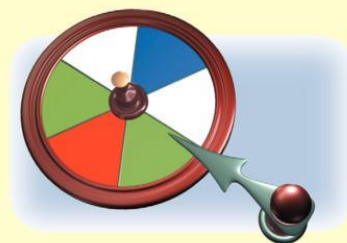
Het acht keer draaien van de schijf in de figuur hiernaast is een voorbeeld van het herhalen van een kansexperiment. Hierbij gebruik je de productregel om kansen te berekenen. Bij het acht keer draaien van de schijf is

$$P(\text{minstens twee keer blauw}) =$$

$$1 - P(\text{geen enkele keer blauw of één keer blauw}) =$$

$$1 - P(\text{geen enkele keer blauw}) - P(\text{één keer blauw}) =$$

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 - 8 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,395.$$



6.6 Pakken met en zonder terugleggen

073



In een vaas zitten acht rode en vier blauwe knikkers. Jasmine pakt drie knikkers uit de vaas.

a Bereken de kans dat Jasmine drie rode knikkers pakt.

Jasmine bedenkt dat deze kans ook op een andere manier berekend kan worden. Als ze de drie knikkers één voor één uit de vaas zou pakken, dan zou de kans op drie rode knikkers hetzelfde moeten blijven.

b Bereken de kans dat de eerste knikker die zij pakt rood is.

c Leg uit waarom de kans dat de tweede knikker weer een rode is, gelijk is aan $\frac{7}{11}$.

Wat is de kans dat de derde knikker ook een rode is?

d Bereken met behulp van de antwoorden van b en c de kans op drie rode knikkers. Is je antwoord anders dan bij vraag a?

e Jasmine berekent de kans op twee rode knikkers en één blauwe met $\frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10}$.

Wat vergeet zij?

f Bereken de kans op twee rode knikkers en één blauwe.

Teun pakt een knikker uit dezelfde vaas, noteert de kleur en legt de knikker terug. Dit doet hij drie keer achter elkaar.

g Bereken de kans dat Teun twee rode knikkers en één blauwe pakt.

Theorie A Het vaasmodel met en zonder terugleggen

Jade laat de schijf van figuur 6.19 vier keer draaien.

Ook dit experiment kun je omzetten naar een vaasmodel. In de vaas stop je

drie rode knikkers (de bananen),

twee witte knikkers (de appels) en

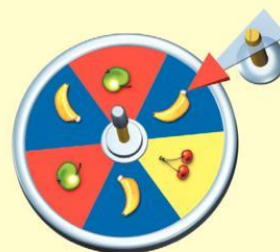
één blauwe knikker (de kersen).

Eén keer draaien met de schijf komt overeen met één

knikker uit de vaas pakken. Vier keer draaien komt overeen met vier

keer een knikker uit de vaas pakken, maar je moet dan wel de knikker telkens terugleggen. De samenstelling van de vaas moet elk keer immers hetzelfde zijn. We zeggen dat we vier knikkers **met terugleggen** uit de vaas pakken.

Tot nu toe hadden we steeds te maken met het **vaasmodel zonder terugleggen**. Vier personen kiezen uit een groep van zes kun je vergelijken met vier keer een knikker uit een vaas pakken *zonder terugleggen*. Je kiest iemand namelijk niet twee keer.



figuur 6.19

Wanneer er staat ‘pak drie knikkers’, dan wordt bedoeld *zonder terugleggen*, tenzij er staat dat het *met terugleggen* is.

Bij pakken *met terugleggen* gebruik je de productregel.

Bij pakken *zonder terugleggen* heb je geleerd de kans te berekenen met de kansdefinitie van Laplace. Je kunt dit echter ook met de productregel doen.

Pak drie knikkers uit een vaas met tien rode en vijf witte knikkers. De kans op twee rode knikkers is:	
met terugleggen	zonder terugleggen
$P(2 \text{ rode}) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{10}{15}\right)^2 \cdot \frac{5}{15} \approx 0,444$	met de productregel: $P(2 \text{ rode}) = \binom{3}{2} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \approx 0,495$ met de kansdefinitie van Laplace: $P(2 \text{ rode}) = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} \approx 0,495$

Voorbeeld

- a** Bij een tv-programma wordt in drie opeenvolgende weken door loting een persoon uit het publiek aangewezen. Het publiek zit op vijftien even lange rijen.

Bereken de kans dat één keer iemand wordt aangewezen die op een van de eerste vier rijen zit.

- b** In een doos zitten vijftien enveloppen, waarvan er vier een prijs bevatten. Paul pakt drie enveloppen.

Bereken de kans dat Paul één enveloppe pakt met een prijs.

Uitwerking

- a** $P(\text{één keer iemand uit rij 1 of 2 of 3 of 4}) = \binom{3}{1} \cdot P(1 \text{ of 2 of 3 of 4, overig, overig}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{4}{15} \cdot \left(\frac{11}{15}\right)^2 \approx 0,430$
- b** $P(\text{één prijs}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{10}{13} \approx 0,484$

R74

Zie voorbeeld b.



a De kans op één enveloppe met een prijs is berekend door gebruik te maken van $P(\text{één prijs}) = \binom{3}{1} \cdot P(\text{p } \cancel{\text{p}} \cancel{\text{p}})$.

Laat zien dat $P(\text{p } \cancel{\text{p}} \cancel{\text{p}}) = P(\cancel{\text{p}} \text{ p } \cancel{\text{p}}) = P(\cancel{\text{p}} \cancel{\text{p}} \text{ p})$.

b Bereken de gevraagde kans met behulp van de kansdefinitie van Laplace.

c Peter pakt zeven enveloppen. Hij wil de kans dat hij twee enveloppen met een prijs pakt berekenen met de productregel.

Leg uit waarom dat niet praktisch is.

75

In een vaas zitten 24 blauwe en 16 groene knikkers.

Kai pakt drie knikkers uit de vaas.

Bereken de kans op

a twee groene knikkers

b minstens één blauwe knikker.

Parisa pakt met terugleggen drie knikkers uit de vaas.

Bereken de kans op

c twee groene knikkers

d minstens één blauwe knikker.

76

In een klas zitten tien jongens en twaalf meisjes.

a Elk van de secties Frans, Duits, Engels en Nederlands verloot een boek in de klas.

Bereken de kans dat de vier boeken door meisjes gewonnen worden.

b De sectie verzorging verloot in de klas vier appeltaarten. Elke leerling kan hoogstens één taart winnen.

Bereken de kans dat de vier taarten door meisjes gewonnen worden.

c De leraar wiskunde kiest willekeurig een groepje van vier leerlingen uit de klas om samen een opdracht te maken.

Bereken de kans dat het groepje drie meisjes telt.

d De leraar kunstgeschiedenis verloot in de klas vier reproducties. Bij de verloting van elke reproductie mogen alle leerlingen meedoen.

Bereken de kans dat drie reproducties door meisjes worden gewonnen.

77

a Toon gooit acht keer met een dobbelsteen.

Bereken de kans dat hij minstens twee keer 4 ogen gooit.

b In een doos zitten 48 enveloppen, waarvan er acht een prijs bevatten.

Ilsa pakt acht enveloppen uit de doos.

Bereken de kans dat Ilsa minstens twee prijzen wint.

A78
□ ⊙ *

In de wielersport wordt veel gecontroleerd op doping. In deze opgave bekijken we wielervedstrijden met 175 renners, waarvan 7 van de Jumbo wielerploeg.

- a** Bij de Ronde van Vlaanderen worden door middel van loting vijf renners aangewezen voor een dopingcontrole. Bereken de kans dat geen enkele renner van Jumbo wordt aangewezen.
- b** Bij een vijfdaagse wielerkoeurs wordt iedere dag door loting één renner aangewezen voor een dopingcontrole. Bereken de kans dat dit geen enkele keer een renner van Jumbo betreft.
- c** Bij een tweedaagse wielerkoeurs worden op beide dagen door loting drie renners aangewezen voor de dopingcontrole. Bereken de kans dat op minstens één van beide dagen een wielrenner van Jumbo naar de dopingcontrole moet.



E79
*

Een wiskundeleraar kiest in een klas van 24 leerlingen iedere les door loting drie leerlingen die een opgave van het huiswerk op het bord voor moeten doen. De leerlingen Bart, Sterre, Isa en Daphne maken zelden hun huiswerk en hopen dat ze niet worden aangewezen. Tijdens een hoofdstuk kansrekening zijn er tien lessen. Bereken de kans dat bij minstens één van de tien lessen minstens één van de genoemde leerlingen een opgave op het bord voor moet doen.

O80
□ ⊙ *

Bij een uitverkocht concert in de Ziggo Dome zijn 17 000 bezoekers, waarvan 13 600 vrouwen. Er worden door loting drie bezoekers gekozen voor een meet-and-greet met de artiest.

- a** Licht toe dat je hier te maken hebt met pakken zonder terugleggen.
- b** Bereken de kans dat alle drie de gekozen toeschouwers vrouwen zijn. Rond af op vijf decimalen.



Tim zegt: 13 600 van de 17 000 toeschouwers zijn vrouw en dat is precies 80%. De kans op drie vrouwen is dus $P(v \ v \ v) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,512$.

- c** Licht toe dat Tim rekent alsof er sprake is van pakken met terugleggen.
- d** Vergelijk je antwoord van b met dat van Tim. Waarom is het antwoord bijna hetzelfde?

Theorie B Kleine steekproef uit grote populatie

Bij veel kansexperimenten gaat het om pakken zonder terugleggen. Denk bijvoorbeeld maar aan de situatie in opgave 80.

Bij het pakken van drie knikkers uit de vaas hiernaast is

$$P(r r r) = \frac{12\,000}{30\,000} \cdot \frac{11\,999}{29\,999} \cdot \frac{11\,998}{29\,998}.$$

Omdat $\frac{12\,000}{30\,000} = 0,4$ en $\frac{11\,999}{29\,999} \approx 0,400$ en $\frac{11\,998}{29\,998} \approx 0,400$

maakt het vrijwel niet uit of je de knikkers met of zonder terugleggen pakt.

Bij het berekenen van $P(r r r)$ mag je pakken zonder terugleggen opvatten als pakken met terugleggen.

Het voordeel hiervan is dat je dan krijgt $P(r r r) = 0,4^3 = 0,064$ en dat is veel eenvoudiger dan de berekening

$$P(r r r) = \frac{12\,000}{30\,000} \cdot \frac{11\,999}{29\,999} \cdot \frac{11\,998}{29\,998} = 0,06399\dots$$

Bij het pakken van drie knikkers uit een vaas met een zeer groot aantal knikkers maakt het voor de kansen weinig uit of het met of zonder terugleggen is.



Bij een kleine steekproef uit een grote populatie mag je pakken zonder terugleggen opvatten als pakken met terugleggen.

Voorbeeld

Van alle boeken die bij de grote webshop Convex worden verkocht, behoort 40% tot het genre fictie en 25% tot het genre kinderboeken.

Een boek kan niet tot beide genres behoren.

Bij Convex worden in een minuut tien boeken verkocht.

Bereken de kans dat

- a geen van deze boeken een kinderboek is
- b zeven van deze boeken tot het genre fictie en drie tot het genre kinderboeken behoren
- c vier van deze boeken tot het genre fictie en drie tot het genre kinderboeken behoren.

Uitwerking

a $P(\text{geen kinderboeken}) = 0,75^{10} \approx 0,056$

b $P(7 \text{ fictie en } 3 \text{ kinderboeken}) = \binom{10}{7} \cdot 0,40^7 \cdot 0,25^3 \approx 0,003$

c $P(4 \text{ fictie, } 3 \text{ kinderboeken, } 3 \text{ overige}) = \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot 0,40^4 \cdot 0,25^3 \cdot 0,35^3 \approx 0,072$

R81

Zie het voorbeeld.

- a** Waarom mag je deze situatie opvatten als pakken met terugleggen?
- b** Licht toe waar 0,75 bij vraag a van het voorbeeld vandaan komt.
- c** Licht toe waarom er in het voorbeeld bij vraag b met een combinatie wordt vermenigvuldigd en bij vraag a niet.
- d** Licht toe waar de factor $\binom{6}{3}$ bij vraag c van het voorbeeld vandaan komt. Licht ook de factor 0,35 toe.

82

Zie het voorbeeld.

Bereken de kans dat

- a** al deze boeken tot het genre fictie of kinderboeken behoren
- b** twee van deze boeken kinderboeken zijn
- c** twee van deze boeken kinderboeken zijn en drie zowel geen fictie als geen kinderboek zijn.

83

Uit een onderzoek blijkt dat 30% van de jongeren een bijbaantje heeft in een supermarkt, 14% in een andere winkel en dat 39% van de jongeren helemaal geen bijbaan heeft. Bij een onderzoek naar de werkdruk die jongeren ervaren, worden twaalf jongeren ondervraagd.

Bereken de kans dat van deze jongeren

- a** de helft een bijbaan heeft
- b** er vijf in een supermarkt werken
- c** er minstens twee een bijbaan hebben die niet in een supermarkt of een andere winkel is
- d** er vier in een supermarkt werken, twee in een andere winkel en vijf geen bijbaan hebben.

In een klas van 30 leerlingen werken er negen bij een supermarkt en twaalf hebben geen bijbaan. Er wordt aan drie leerlingen gevraagd wat voor bijbaan ze hebben.

Bereken de kans dat

- e** één van deze leerlingen bij een supermarkt werkt
- f** minstens één van deze leerlingen bij een supermarkt werkt
- g** slechts één van deze leerlingen een bijbaan heeft, maar niet bij een supermarkt.

A84

Negen van de tien Nederlanders heeft minstens één vriend(in).

Van de in Nederland voorkomende vriendschappen is 44% opgedaan via studie/werk, 29% via de buurt en 12% via een sportvereniging.

We bekijken 15 willekeurig gekozen vriendschappen.

Bereken de kans dat er

- a** minstens één is opgedaan via een sportvereniging
- b** minstens twee op een andere manier zijn opgedaan dan via de drie genoemde mogelijkheden
- c** zeven zijn opgedaan via studie/werk en drie via de buurt.

A85
□ ⊙ *

Van de Nederlandse huishoudens heeft 54% groene stroom. Nog eens 20% van de huishoudens overweegt over te gaan op groene stroom.

Bij een onderzoek worden 12 huishoudens benaderd.

Bereken de kans dat hiervan

- a zes of zeven groene stroom hebben
- b 25% overweegt over te gaan op groene stroom
- c hoogstens twee huishoudens geen groene stroom hebben en dat ook niet overwegen.



In een straat met 83 huishoudens hebben 40 huishoudens groene stroom.

Nog eens 25 huishoudens overwegen over te gaan op groene stroom.

Bij een enquête worden drie huishoudens uit deze straat benaderd.

Bereken de kans dat hierbij

- d twee huishoudens zijn met groene stroom en één huishouden overweegt om over te gaan op groene stroom
- e minstens één huishouden is zonder groene stroom.

A86
⊙ *

Uit onderzoek blijkt dat 9% van de Nederlanders een muziekinstrument bespeelt.

- a Bereken de kans dat twee willekeurig gekozen Nederlanders beiden geen muziekinstrument bespelen.
- b Bereken de kans dat van drie willekeurig gekozen Nederlanders er één een muziekinstrument bespeelt.
- c Bereken de kans dat van vijf willekeurig gekozen Nederlanders er hoogstens één een muziekinstrument bespeelt.
- d Hoe groot moet een gezelschap zijn, zodat de kans dat hiervan minstens één iemand een muziekinstrument bespeelt groter is dan 95%?



In een bedrijf met 100 medewerkers bespelen er negen een muziekinstrument.

- e Bereken de kans dat twee willekeurig gekozen medewerkers beiden een muziekinstrument bespelen.

Terugblik

Pakken met en zonder terugleggen

Pak je drie knikkers uit een vaas met 3 rode en 4 witte knikkers, dan kan dat met terugleggen, maar ook zonder terugleggen.

Voor $P(\text{één rode knikker})$ krijg je bij het pakken

met terugleggen

$$P(\text{één rode}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2 \approx 0,420$$

Gebruik de productregel.

zonder terugleggen

- met de productregel (noemer telkens één kleiner)

$$P(\text{één rode}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \approx 0,514$$

- met de kansdefinitie van Laplace

$$P(\text{één rode}) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} \approx 0,514$$

Bij het testen van een nieuw medicijn moeten de proefpersonen elke dag een capsule innemen. Op een strip zitten twaalf van deze capsules. Vijf van de twaalf capsules bevatten een placebo (nepmedicijn). De andere zeven capsules bevatten het echte medicijn. De capsules met de placebo zijn willekeurig over de strip verdeeld. Bij het berekenen van de kans dat van vier proefpersonen er één de eerste dag begint met een placebo en drie met het echte medicijn heb je te maken met pakken met terugleggen.

$$\text{De kans is } \binom{4}{1} \cdot \frac{5}{12} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^3 \approx 0,331.$$

Bij het berekenen van de kans dat een proefpersoon op de eerste vier dagen één placebo inneemt en drie capsules met het echte medicijn heb je te maken met pakken zonder terugleggen.

$$\text{De kans is } \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{12}{4}} \approx 0,354.$$

Kleine steekproef uit grote populatie

Bij een kleine steekproef uit een grote populatie mag je pakken zonder terugleggen opvatten als pakken met terugleggen. Een toepassing van deze vuistregel zie je hieronder.

Van de Nederlanders heeft 12% contactlenzen. De kans dat van een willekeurige groep van 14 Nederlanders er niemand contactlenzen heeft, is $0,88^{14} \approx 0,167$.

De kans dat er twee contactlenzen hebben, is

$$\binom{14}{2} \cdot P(c \text{ c } \cancel{c} \dots \cancel{c}) = \binom{14}{2} \cdot 0,12^2 \cdot 0,88^{12} \approx 0,283.$$

Eindopdracht Diensten in het ziekenhuis

In de beginopdracht heb je gezien hoe kansrekening in de rechtspraak tot paradoxale situaties kan leiden. In de eindopdracht bekijk je hoe kleine veranderingen in statistische gegevens andere conclusies tot gevolg kunnen hebben.

Bij het onderzoek voor de rechtszaak tegen Lucia de Berk werd gekeken naar diensten met verdachte sterfgevallen. Het aantal verdachte sterfgevallen in de diensten van Lucia de Berk werd vergeleken met alle andere diensten. Onderzocht werd hoe groot de kans was op een bepaald aantal verdachte sterfgevallen in het geval er sprake zou zijn van toeval. Het bepalen van wat verdachte sterfgevallen waren, gebeurde op een subjectieve manier. Bovendien bleken de gegevens die werden aangeleverd niet altijd betrouwbaar. Aan de hand van het volgende voorbeeld is te zien dat dit de kansberekeningen behoorlijk kan beïnvloeden.

Op een afdeling van een ziekenhuis zijn in een bepaalde periode in totaal 450 diensten gedraaid. Tijdens 120 van deze diensten was verpleegkundige Florence aan het werk. Er blijken 7 verdachte gebeurtenissen te zijn geweest tijdens de 450 diensten, allemaal tijdens de diensten van Florence.

- De kans dat alle 7 verdachte gebeurtenissen tijdens een dienst van Florence waren, is kleiner dan 1 op 10 000.
Laat dit met een berekening zien.

Er is een administratieve fout gemaakt. Slechts 5 van de 7 verdachte gebeurtenissen blijken tijdens een dienst van Florence te zijn geweest.

- Bereken de kans dat er bij toeval minstens 5 van de 7 verdachte gebeurtenissen tijdens een dienst van Florence waren.
Laat zien dat deze kans bijna 200 keer zo groot is als de eerder berekende kans.
- Waarom is het in deze situatie beter om de kans op minstens 5 verdachte gebeurtenissen te berekenen, dan de kans op precies 5 verdachte gebeurtenissen?

Nog later ontdekt men dat er niet alleen administratieve fouten zijn gemaakt, maar ook verkeerde inschattingen. Er worden nog eens 6 gebeurtenissen als verdacht aangemerkt. Florence was bij geen van deze gebeurtenissen betrokken.

- Bereken op basis van deze nieuwe gegevens de kans dat minstens 5 verdachte gebeurtenissen tijdens een dienst van Florence waren.
- Hoeveel keer zo groot is de laatst berekende kans als de eerste kans die je in deze eindopdracht hebt berekend?

Diagnostische toets

6.1 Kansen

- 1** Fien gooit met een gewone dobbelsteen en met een achthoeksdobbelsteen. Bereken exact de kans dat
- a** de som 8 is
 - b** de som minder dan 4 is
 - c** het verschil 2 is
 - d** de aantallen gelijk zijn.
- 2** Anne Geeke gooit met vier viervlaksdobbelstenen. Bereken exact de kans dat
- a** het product 16 is
 - b** de som meer dan 13 is.

6.2 Empirische kansen

- 3** In de bovenbouw van het Noorder College is van elke leerling de lengte gemeten. De resultaten staan in de tabel. Bereken de kans dat op deze school een willekeurig gekozen bovenbouwleerling
- a** in de middelste lengteklasse zit
 - b** die 180 cm of langer is in de vierde klas zit
 - c** uit de vierde of vijfde klas 160 cm of langer is
 - d** 160 cm of langer is en in de vijfde of zesde klas zit.

LEERLINGEN BOVENBOUW NOORDER COLLEGE

lengte in cm	klas 4	klas 5	klas 6	
[140, 160)	15	5	3	23
[160, 180)	59	49	51	159
[180, 200)	6	12	15	33
	80	66	69	215

De gebeurtenissen 'leerling zit in klas 5' en 'leerling behoort tot lengteklasse [180, 200)' zijn afhankelijke gebeurtenissen.

e Toon dit aan.

6.3 Het vaasmodel en de productregel

- 4** In een vaas zitten vijf rode, zeven witte en negen blauwe knikkers. Marion pakt zes knikkers uit de vaas. Bereken de kans dat zij
- a** van elke kleur twee knikkers pakt
 - b** geen blauwe knikkers pakt
 - c** twee rode knikkers pakt
 - d** alleen maar blauwe knikkers pakt.
- 5** Bij een loterij zijn 40 loten verkocht. Er is één hoofdprijs, er zijn zes tweede prijzen en tien derde prijzen. Manon heeft vier loten gekocht. Bereken de kans dat Manon
- a** geen enkele prijs wint
 - b** de hoofdprijs en één derde prijs wint
 - c** alleen twee tweede prijzen wint.

- 6** Masha gooit met vier dobbelstenen.

Bereken de kans dat ze

- a** in totaal 24 ogen gooit
- b** geen enkele zes gooit.

6.4 De somregel

- 7** Op een woensdagmorgen staan in een dorp 160 gft-containers langs de weg, waarvan 10% afval bevat dat er niet in thuishoort. De gemeentedienst inspecteert de inhoud van 20 van deze containers. Bereken de kans dat van hoogstens twee van de geïnspecteerde containers de inhoud niet in orde is.

- 8** Jietske laat de schijf in de figuur hiernaast zeven keer draaien.

Bereken de kans dat de pijl

- a** vijf keer rood en twee keer wit aanwijst
- b** minstens zes keer niet op blauw komt
- c** hoogstens twee keer op wit komt.



6.5 De complementregel

- 9** Bij een loterij zijn 120 loten verkocht. De loten kosten 5 euro per stuk. Er is een hoofdprijs van 100 euro en er zijn vier tweede prijzen van 25 euro. Nicolien heeft zes loten gekocht. Bereken de kans dat zij
- a** minstens één prijs wint
 - b** 100 euro wint
 - c** geen verlies lijdt bij deze loterij
 - d** minder dan 100 euro wint.

- 10** Tijdens het productieproces ondergaat een stoel drie bewerkingen. De kans dat er iets mis gaat bij de eerste bewerking is 0,05, bij de tweede bewerking is dat 0,09 en bij de derde 0,03. Bereken de kans dat er bij minstens één bewerking iets misgaat.

6.6 Pakken met en zonder terugleggen

- 11** De sectie wiskunde van een school bestaat uit negen mannen en zeven vrouwen.
- a** Voor een cursus worden willekeurig vijf sectieleden gekozen. Bereken de kans dat er drie vrouwen worden gekozen.
 - b** Elk jaar wordt door loting de sectievoorzitter aangewezen. Bereken de kans dat in vijf opeenvolgende jaren drie keer een vrouwelijke sectievoorzitter uit de bus komt.
- 12** Van de beroepsbevolking van Leiden heeft 45% een hoog en 29% een middelbaar opleidingsniveau. Uit deze groep worden willekeurig negen inwoners gekozen. Bereken de kans dat vier een hoog en drie een middelbaar opleidingsniveau hebben.

6 Kansrekening

- 12** Jan gooit met twee dobbelstenen.
Bereken exact de kans op de gebeurtenis
- a** de som van de ogen is minder dan 6
 - b** het verschil van de ogen is 2.

Jan gooit tien keer met twee dobbelstenen.

Bereken de kans dat

- c** hij drie keer een verschil van 2 ogen zal gooien
- d** hij minstens acht keer een som van minder dan 6 ogen zal gooien.

Frank gooit met een viervlaksdobbelsteen, een gewone dobbelsteen en een achtlaksdobbelsteen.

Bereken exact de kans dat

- e** de som vijf is
- f** hij met elke dobbelsteen hetzelfde gooit.



- 13** Een vaas bevat vijf rode en vier witte knikkers.
Sarah doet drie keer achter elkaar het volgende. Ze pakt één knikker uit de vaas en doet deze knikker samen met nog twee knikkers van dezelfde kleur als de gepakte knikker terug in de vaas.
- a** Maak een kansboom bij deze situatie.
 - b** Bereken de kans dat Sarah alleen rode knikkers gepakt heeft.
 - c** Bereken de kans dat Sarah meer rode dan witte knikkers gepakt heeft.

- 14** In een gokautomaat draaien vier schijven onafhankelijk van elkaar. Door een hendel kan elke schijf tot stilstand worden gebracht.

In de tabel zie je wat er op elke schijf staat.

Bereken de kans op

- a** drie appels en één kers
- b** vier gelijke plaatjes
- c** één banaan
- d** geen kiwi.

plaatje	aantal			
	schijf 1	schijf 2	schijf 3	schijf 4
appel	5	2	2	5
peer	3	4	4	3
banaan	1	5	5	1
kers	3	2	0	0
kiwi	3	2	4	6
	15	15	15	15

- 15** Bij een loterij zijn 65 loten verkocht. Er zijn tien prijzen beschikbaar: één eerste prijs van 20 euro, drie tweede prijzen van 10 euro en zes derde prijzen van 5 euro.

Daan heeft vijf loten gekocht.

Bereken de kans dat

- a** hij geen prijs wint
- b** hij minstens 10 euro wint
- c** hij een tweede en een derde prijs wint
- d** op twee loten van Daan een prijs valt.

- 16** Op het LaPlace College is in de vierde klassen onderzoek gedaan naar de inkomsten van de leerlingen. Zie de tabel.

Uit deze groep worden willekeurig twaalf vierdeklassers gekozen, die ondervraagd zullen worden over hun bestedingen.

Bereken de kans dat

- a** hierbij vijf meisjes zitten die minder dan 150 euro per maand aan inkomsten hebben
- b** hierbij tweemaal zoveel meisjes als jongens zijn
- c** hierbij vijf meisjes zijn die 150 euro of meer per maand aan inkomsten hebben en niemand minder dan 120 euro per maand aan inkomsten heeft
- d** minstens drie van hen minstens 150 euro per maand aan inkomsten hebben
- e** de helft van de gekozen leerlingen een jongen is en minstens vier van de gekozen meisjes 120 euro of meer, maar minder dan 180 euro per maand aan inkomsten hebben.

INKOMSTEN PER MAAND

euro	jongen	meisje	
[0, 120)	8	15	23
[120, 150)	26	21	47
[150, 180)	16	27	43
[180, 300)	2	5	7
	52	68	120

De gebeurtenissen 'leerling is meisje' en 'leerling heeft minstens 150 maar minder dan 180 euro per maand aan inkomsten' zijn afhankelijke gebeurtenissen.

- f** Toon dit aan.

- 17** Volgens tellingen van Veilig Verkeer Nederland houdt 68% van de automobilisten in de bebouwde kom van het plaatsje Borne zich aan de maximumsnelheid van 50 km per uur. Van de automobilisten die te hard rijden, rijdt een kwart meer dan 70 km per uur. Tussen 10:00 uur en 10:05 uur passeerden tien automobilisten de controlepost in Borne.

Bereken de kans dat

- a** alle automobilisten zich aan de maximumsnelheid hielden
- b** zeven automobilisten zich aan de maximumsnelheid hielden en één automobilist meer dan 70 km per uur reed
- c** minstens twee automobilisten te hard reden.

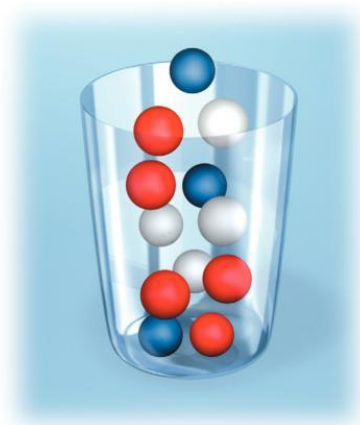


- 18** Een klas maakt een proefwerk bestaande uit 18 vierkeuzevragen.

- a** Bereken de kans dat Martijn, die elk antwoord moet raden, twee of drie antwoorden goed heeft.
- b** Alfred weet op vijf vragen met zekerheid het juiste antwoord. De andere vragen moet hij gokken.
Bereken de kans dat hij in totaal minder dan acht vragen goed beantwoordt.
- c** Patricia weet op 13 vragen het juiste antwoord. Bij de andere vragen moet ze het antwoord raden.
Bereken de kans dat ze in totaal minstens 16 vragen goed heeft.

- 19** In een vaas zitten vijf rode, vier witte en drie blauwe knikkers.

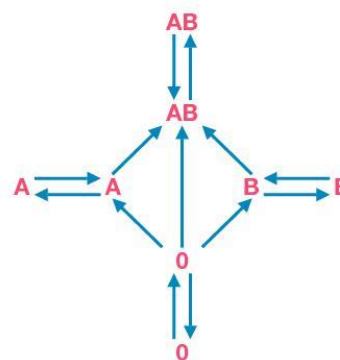
- a** Ferdinand pakt met terugleggen zes keer een knikker uit de vaas.
Bereken de kans dat hij drie keer een rode en drie keer een blauwe knikker pakt.
- b** Martine pakt in één greep drie knikkers uit de vaas en legt ze vervolgens weer terug. Ze doet dit in totaal zes keer.
Bereken de kans dat ze daarbij twee keer geen enkele rode knikker pakt.
- c** Rob pakt zonder terugleggen vier knikkers uit de vaas.
Bereken de kans dat er evenveel witte als blauwe knikkers in de vaas achterblijven.



20 Menselijk bloed behoort altijd tot een van de vier bloedgroepen 0, A, B of AB.

De bloedgroep speelt een belangrijke rol als iemand bloed nodig heeft bij bijvoorbeeld ernstig bloedverlies door een operatie of een ongeluk. Degene die bloed nodig heeft, krijgt tijdens een bloedtransfusie bloed van iemand anders toegediend. Vooraf wordt gelet op de bloedgroep van de donor (gever) en van de ontvanger.

In figuur G.1 zie je tussen welke bloedgroepen een bloedtransfusie mogelijk is. De richting van de pijlen loopt van donor naar ontvanger. Je kunt zien dat iemand met bloedgroep 0 bloed kan geven aan iemand met bloedgroep A maar omgekeerd niet. Het is altijd mogelijk om bloed te krijgen van iemand met dezelfde bloedgroep.



figuur G.1

Welke bloedgroep iemand heeft, is door erfelijkheid bepaald.

In deze opgave gaan we ervan uit dat alle personen geen familie van elkaar zijn en dat hun bloedgroep door het toeval is bepaald.

- a** Is het bij twee mensen mogelijk dat geen van beiden bloed kan geven aan de ander? Licht je antwoord toe.

Niet elke bloedgroep komt even vaak voor. We gaan van de verdeling hiernaast uit.

De kans dat een willekeurige persoon bloedgroep 0 heeft, is dus 0,46.

bloedgroep	0	A	B	AB
percentage	46%	43%	8%	3%

- b** Bereken de kans dat twee willekeurige personen dezelfde bloedgroep hebben.

In sommige delen van de wereld is het ontvangen van bloed bij een bloedtransfusie zeer riskant, onder andere vanwege de grote kans op besmetting met het hiv-virus. Als je met een groepsreis naar zo'n riskant deel van de wereld gaat en er gebeurt iets waardoor je een bloedtransfusie nodig hebt, dan zou je vanwege dit risico kunnen besluiten om bloed te ontvangen van een van je reisgenoten.

Uit figuur G.1 blijkt dat iemand met bloedgroep 0 aan iedereen bloed kan geven. Het is dus prettig als er in de groep tenminste één persoon is die bloedgroep 0 heeft.

- c** Bereken de kans dat er in een groep van twaalf personen minstens één persoon bloedgroep 0 heeft.

Tot nu toe zijn we voorbijgegaan aan het feit dat bij een bloedtransfusie ook rekening gehouden moet worden met de resusfactor.

Er is resuspositief bloed en resusnegatief bloed.

Neem aan dat de resusfactor bij mensen door toeval bepaald wordt en dat voor elk van de vier bloedgroepen geldt dat 85% resuspositief is en 15% resusnegatief. Er bestaan dus acht verschillende *bloedtypen*, namelijk 0+ (bloedgroep 0 en resuspositief), 0- (bloedgroep 0 en resusnegatief), A+ (bloedgroep A en resuspositief), enzovoort.

- d** Bereken de kans dat twee willekeurige personen hetzelfde bloedtype hebben.

- 21** Tijdens een klassenuitje gaan de 24 leerlingen van klas 4Va met elkaar kanoën. In elke kano passen maximaal zes leerlingen. Er zijn vijf kano's gehuurd die genummerd zijn van 1 t/m 5. De leerlingen verdelen zich willekeurig over de kano's.

Bereken de kans dat

- a** in kano 3 twee plaatsen leeg blijven
- b** kano 1 en 2 geheel vol zullen zitten.

- 22** Er wordt veel onderzoek gedaan naar mogelijkheden ter bestrijding en voorkoming van plantenziektes. De volgende vragen gaan over de risico's dat planten besmet raken. De situaties die we bekijken zijn sterk vereenvoudigd.

In de eerste situatie bekijken we een veldje waarop men 's ochtends tien gezonde planten plant in twee rijen van vijf. Zie figuur G.2.

We nemen aan dat elke gezonde plant per dag een kans van 0,3 heeft om besmet te raken.

- a** Bereken de kans dat op de eerste dag alle planten van de linkerrij besmet raken en alle planten van de rechterrij niet besmet raken. Rond af op vier decimalen.



figuur G.2

De tweede situatie gaat over een experiment waarbij op een zeker moment 40 gezonde planten aan besmetting worden blootgesteld.

We nemen ook hier aan dat elke gezonde plant per dag een kans van 0,3 heeft op besmetting.

- b** Bereken de kans dat op de eerste dag van het experiment 12 of 13 planten besmet raken.

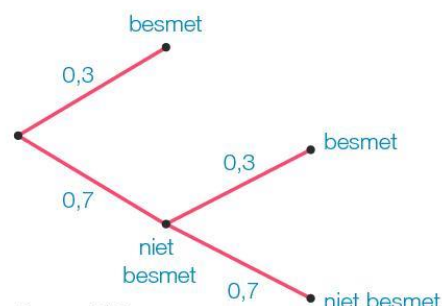
Voor het onderzoek is het van belang dat er na een dag nog planten zijn die niet besmet zijn.

- c** Bereken met hoeveel gezonde planten de onderzoeker minimaal moet beginnen, opdat de kans dat hij na één dag minstens één onbesmette plant overhoudt, groter is dan 0,99.

We bekijken nu de kans dat een van de 40 gezonde planten na twee dagen besmet is. In figuur G.3 is de bijbehorende kansboom afgebeeld.

De kans dat alle 40 planten na twee dagen niet besmet zijn, is minder dan een miljardste.

- d** Toon dit met een berekening aan.



figuur G.3

23 J&J's zijn chocoladesnoepjes met een suikerlaagje. Ze bestaan in zes verschillende kleuren. Volgens de fabrikant is de kleurverhouding in elke productiebatch 30% bruin, 20% geel, 20% rood, 10% oranje, 10% groen en 10% blauw.

Voordat de J&J's in de zakjes gaan, worden de kleuren gemixt in een grote mixtrommel.

Jasper is in het bezit van een uitdeelzak met 14 kleine zakjes J&J's. In elk van de zakjes zitten 20 J&J's.

- a Bereken de kans dat 20% van de J&J's in de uitdeelzak rood is.
- b Hoeveel bruine J&J's verwacht je dat er in de uitdeelzak van Jasper zitten? Bereken de kans op dit aantal.
- c Hoeveel van de kleine zakjes bevatten naar verwachting minstens drie blauwe J&J's?

