



8

Differentiaalrekening

Wat leer je?

- Veranderingen in beeld brengen met toenamediagrammen.
- Berekenen van gemiddelde veranderingen.
- Teken en hellingsgrafieken.
- Wat differentiëren is en enkele regels die je hierbij gebruikt.
- De afgeleide gebruiken om extreme waarden te berekenen.



Beginopdracht Toltarieven

Bij een tolbrug hangt het aantal personenauto's dat hier gebruik van maakt af van het toltarief.

Men heeft hierbij het model $N = 0,3T^3 - 13,5T^2 + 5000$ opgesteld.

Hierin is N het aantal personenauto's dat per dag gebruikmaakt van de brug en T het bedrag in euro's dat per auto moet worden betaald om over de brug te mogen rijden (het toltarief). In dit model is T maximaal 30.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van N .

Je ziet dat N kleiner wordt als T toeneemt.

Je ziet ook dat N in het begin toenemend dalend is. Zo neemt N meer af als T toeneemt van 10 tot 11 dan als T toeneemt van 5 tot 6.

- Bereken het verschil in deze afnames.

De daling van N is het grootst als $T = 15$.

- Bereken de afname van het aantal auto's als het toltarief wordt verhoogd van € 14,90 naar € 15,10.

De opbrengst kan worden berekend met de formule $R = N \cdot T$.

Hierin is R de dagelijkse opbrengst in euro's.

De formule van R uitgedrukt in T is $R = 0,3T^4 - 13,5T^3 + 5000T$.

- Laat zien hoe je aan deze formule kunt komen.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van R .

Je ziet dat R een maximum heeft.

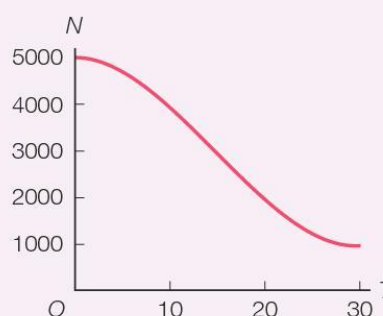
- Bereken welk toltarief bij dit maximum hoort. Rond af op centen.

Totdat de maximale opbrengst is bereikt, neemt de opbrengst toe als het toltarief toeneemt. De snelheid waarmee dit gebeurt, neemt echter af.

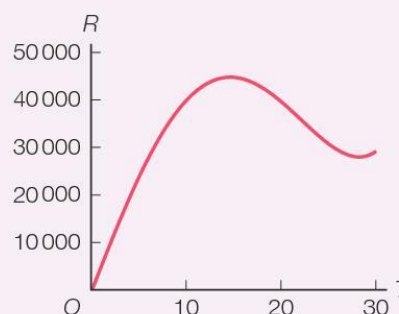
- Hoe kun je dit in de grafiek zien?
- Laat met een berekening zien dat de toename van de opbrengst groter is als het toltarief toeneemt van 5 tot 6 euro, dan als het toltarief toeneemt van 10 tot 11 euro.

Als het toltarief meer wordt dan het toltarief dat bij het maximum hoort, dan neemt de opbrengst af. Deze afname is niet gelijk bij elke toename van het toltarief met 1 euro. Zo is bij een toename van het toltarief van 16 tot 17 euro de afname van de opbrengst ongeveer 634 euro en bij een toename van het toltarief van 17 tot 18 euro de afname van de opbrengst ongeveer 970 euro.

- Het toltarief neemt toe van x tot $x + 1$ euro met x geheel. Onderzoek bij welke x de afname van de opbrengst het grootst is.



figuur 8.1

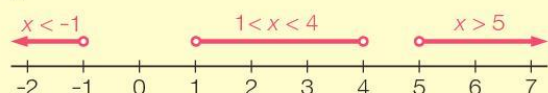


figuur 8.2

Voorkennis Intervallen, stijgen en dalen

Theorie A Soorten van stijgen en dalen

Een interval is een aaneengesloten stuk van de getallenlijn.
In de figuur hieronder zijn boven de getallenlijn drie intervallen getekend.



figuur 8.3

Het interval $x < -1$ noteren we als $\langle \leftarrow, -1 \rangle$.

Het interval $1 < x < 4$ noteren we als $\langle 1, 4 \rangle$.

Het interval $x > 5$ noteren we als $\langle 5, \rightarrow \rangle$.

Deze drie intervallen zijn open intervallen.

Bij een open interval horen de grenzen niet bij het interval.

Behalve open intervallen zijn er ook gesloten intervallen.

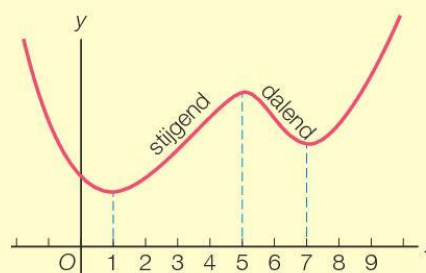
Bij een gesloten interval horen de grenzen wel bij het interval.

Het gesloten interval $1 \leq x \leq 4$ noteren we als $[1, 4]$.

Zie figuur 8.4. Als x toeneemt van 1 tot 5, dan ga je langs de grafiek omhoog. We zeggen: de grafiek is stijgend op het interval $\langle 1, 5 \rangle$.

De grafiek is dalend op het interval $\langle 5, 7 \rangle$.

Verder zie je: de grafiek is dalend op het interval $\langle \leftarrow, 1 \rangle$ en de grafiek is stijgend op het interval $\langle 7, \rightarrow \rangle$.



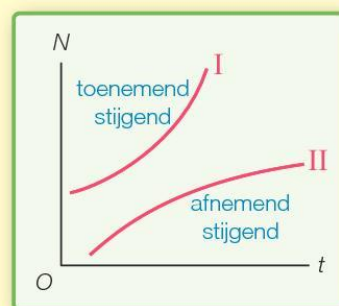
figuur 8.4

Hiernaast zie je twee grafieken die beide stijgend zijn.

Ga je van links naar rechts over de grafieken, dan ga je omhoog. Maar toch is er een belangrijk verschil tussen de twee grafieken.

Bij grafiek I is de toename steeds groter; de grafiek gaat steeds steiler omhoog. Er is sprake van toenemende stijging.

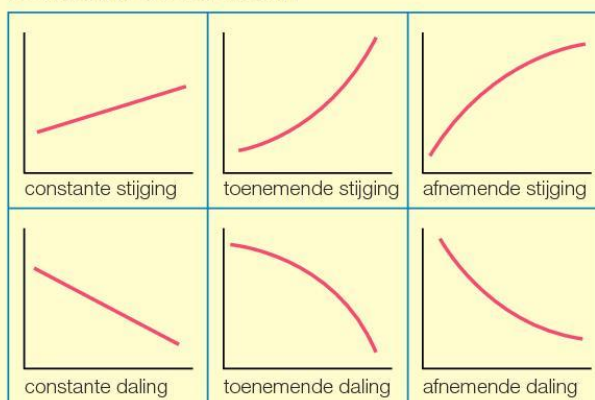
Bij grafiek II komt er telkens minder bij; de grafiek gaat steeds minder steil omhoog. Er is sprake van afnemende stijging.



Hiernaast staan de verschillende soorten van stijgen en dalen vermeld.

Op de vraag welke soorten van stijgen en dalen je in een grafiek herkent, noteer je de grootst mogelijke open intervallen. Zie het voorbeeld.

SOORTEN VAN STIJGEN EN DALEN

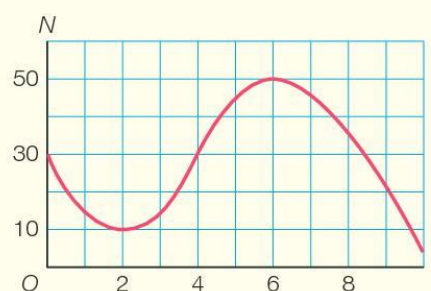


Voorbeeld

Welke soorten van stijgen en dalen kun je op het interval $[0, 10]$ in figuur 8.5 herkennen? Noem ook de bijbehorende intervallen.

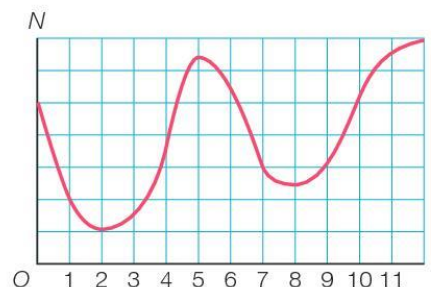
Uitwerking

afnemend dalend op $\langle 0, 2 \rangle$
toenemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$
afnemend stijgend op $\langle 4, 6 \rangle$
toenemend dalend op $\langle 6, 10 \rangle$



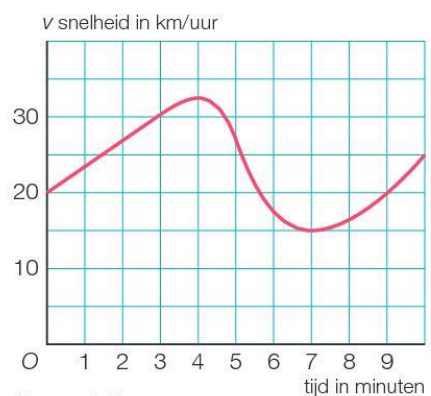
figuur 8.5

- 1** Zie figuur 8.6 met t tussen 0 en 12.
- Welke soorten van stijgen herken je? Noem ook de bijbehorende intervallen.
 - Welke soorten van dalen herken je? Noem ook de bijbehorende intervallen.



figuur 8.6

- 2** De grafiek in figuur 8.7 gaat over de snelheid van een fietser tijdens een tocht door een glooiend landschap.
- Welke soorten van stijgen en dalen herken je op het interval $[0, 10]$? Noem ook de bijbehorende intervallen.
 - Op welk tijdsinterval is de fietser aan het klimmen?



figuur 8.7

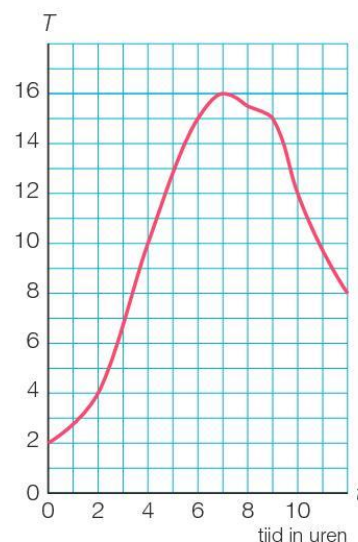
8.1 Toenamediagrammen en differentiequotiënten

01
□ ⊗ *

Jasmijn heeft op een dag in maart van acht uur 's morgens tot acht uur 's avonds het temperatuurverloop bijgehouden. Zie de figuur hiernaast. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 8:00 uur en T de temperatuur in graden Celsius. Je ziet dat om acht uur 's ochtends de temperatuur 2°C was.

- Wat is de toename van de temperatuur tussen tien uur en twaalf uur?
- Wat is de toename van T op het interval $[4, 6]$?
- Op het interval $[8, 10]$ is er een afname. De verandering van T is dus negatief. Hoe groot is deze afname?
- Neem over en vul in.

interval	$[0, 2]$	$[2, 4]$	$[4, 6]$	$[6, 8]$	$[8, 10]$	$[10, 12]$
ΔT						



figuur 8.8

Theorie A Van grafiek naar toenamediagram

Het aantal radioluisteraars op een doordeweekse dag neemt in de loop van de ochtend toe. Zie figuur 8.9a. Hierin is N het aantal luisteraars in duizendtallen en t de tijd in uren met $t = 0$ om 6:00 uur.

Van $t = 0$ tot $t = 1$ is de toename $\Delta N = 15 - 5 = 10$.

Dus op het interval $[0, 1]$ is $\Delta N = 10$.

Op het interval $[4, 5]$ is er een afname van 7.

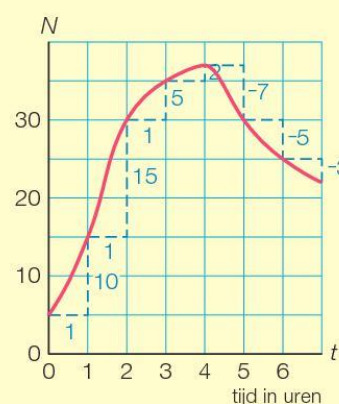
Dus op $[4, 5]$ is $\Delta N = -7$.

In de tabel staat bij intervallen met $\Delta t = 1$ de bijbehorende ΔN .

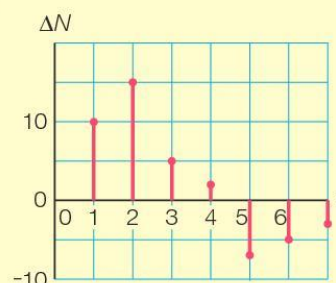
interval	$[0, 1]$	$[1, 2]$	$[2, 3]$	$[3, 4]$	$[4, 5]$	$[5, 6]$	$[6, 7]$
ΔN	10	15	5	2	-7	-5	-3

In figuur 8.9b is bij de tabel een nieuw soort diagram getekend. Eerst is boven de *rechtergrens* van elk interval de bijbehorende ΔN uitgezet. Vervolgens zijn de punten door verticale lijnstukken met de t -as verbonden.

Figuur 8.9b heet een **toenamediagram**. Bij dit toenamediagram is de **stapgrootte** $\Delta t = 1$.



a



b

figuur 8.9

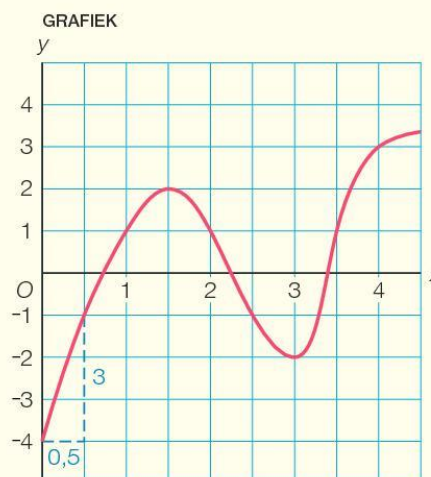
Voorbeeld

Zie figuur 8.10.

Teken het toenamediaagram op het interval $[0; 3,5]$ met stapgrootte $\Delta x = 0,5$.

Aanpak

Maak eerst een tabel met toenames. Op $[0; 3,5]$ is het eerste interval met $\Delta x = 0,5$ het interval $[0; 0,5]$. Let erop dat je Δy telkens boven de rechtergrens van het bijbehorende interval uitzet. Bij de verticale as zet je Δy .



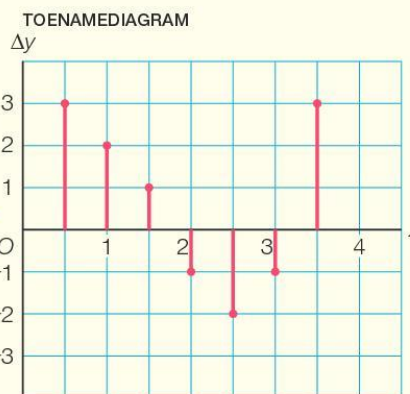
figuur 8.10

Uitwerking

interval	Δy
$[0; 0,5]$	3
$[0,5; 1]$	2
$[1; 1,5]$	1
$[1,5; 2]$	-1
$[2; 2,5]$	-2
$[2,5; 3]$	-1
$[3; 3,5]$	3

Op $[0; 0,5]$ is de toename 3.

Dus het staafje boven 0,5 heeft lengte 3.



2

Zie figuur 8.10 van het voorbeeld.



Teken het toenamediaagram op het interval $[0, 4]$ met $\Delta x = 1$.

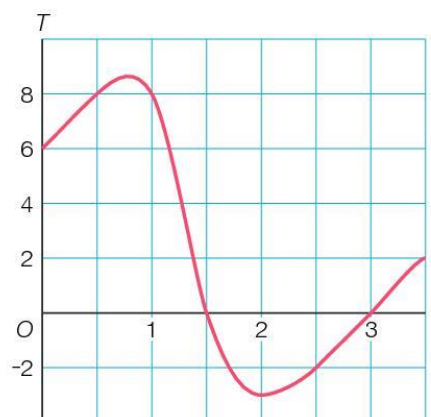
3

Zie figuur 8.11.



a Teken het toenamediaagram op het interval $[0, 3]$ met $\Delta t = 1$.

b Teken het toenamediaagram op het interval $[0; 3,5]$ met $\Delta t = 0,5$.



figuur 8.11

R4
☐ ⊗ *

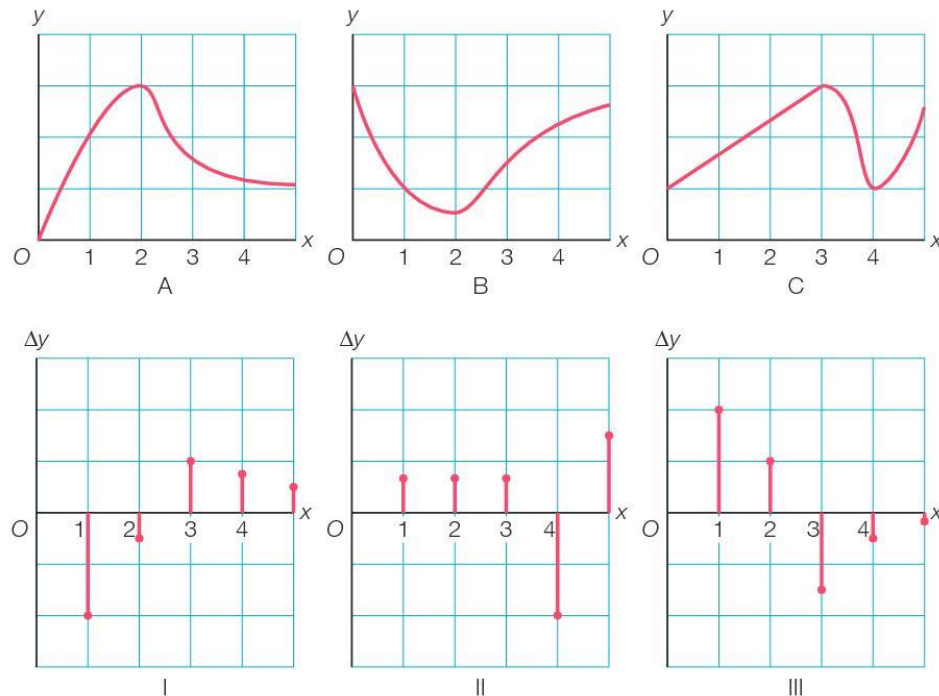
Teken een toenamediagram bij een grafiek die

- a één maximum heeft
- b één minimum heeft
- c bij een lineair verband hoort
- d afnemend dalend is.

A5
☐ ⊗ *

Hieronder zie je drie grafieken en drie toenamediagrammen. Bij elk van de grafieken hoort één van de toenamediagrammen.

Zoek bij elke grafiek het juiste toenamediagram. Licht je keuze toe.

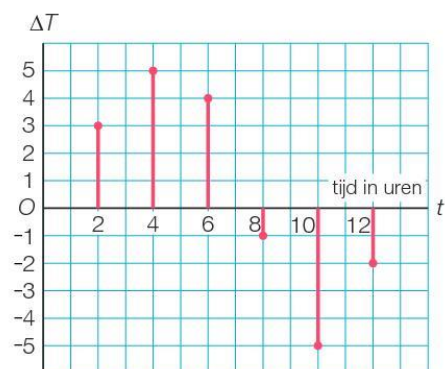


figuur 8.12

06
☐ ⊗ *

Jasmijn heeft op een dag in juni van acht uur 's morgens tot acht uur 's avonds het temperatuurverloop bijgehouden. Ze heeft hiervan een toenamediagram gemaakt met stapgrootte 2 uur. Zie de figuur hiernaast. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 8:00 uur en T de temperatuur in graden Celsius. Om twaalf uur 's middags was het 20°C .

- a Licht toe dat het 's middags om twee uur 24°C was.
- b Wat was de temperatuur om vier uur 's middags? En om acht uur 's avonds?
- c Reken na dat de temperatuur om acht uur 's morgens 12°C was.



figuur 8.13

Theorie B Van toenamediagram naar grafiek

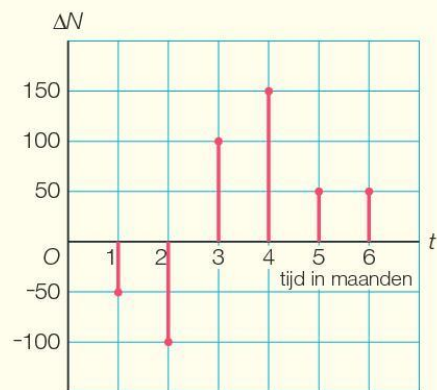
Zijn bij een toenamediagram de coördinaten bekend van een punt van de bijbehorende grafiek, dan kun je coördinaten van andere punten van de grafiek berekenen. Door deze punten is vervolgens een grafiek te tekenen. In het voorbeeld krijg je op deze manier de coördinaten van zeven punten. Tenzij je nog meer informatie hebt over de grafiek, is in theorie elke grafiek door deze zeven punten mogelijk.

Voorbeeld

Het toenamediagram in figuur 8.14 geeft informatie over het aantal konijnen N in een duingebied. Hierin is t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2020.

Op 1 april 2020 zijn er 850 konijnen.

- Teken een grafiek bij deze gegevens.
- Tussen 1 januari en 1 juli 2020 was het aantal konijnen één keer minimaal. De natuurbeheerder beweert dat dit minimum optrad in de maand februari. Kan dit kloppen?



figuur 8.14

Aanpak

- Maak een tabel met t en N . Gebruik dat op 1 april (dus op $t = 3$) geldt dat $N = 850$. Van $t = 3$ tot $t = 4$ neemt N met 150 toe, dit kun je zien aan het staafje bij $t = 4$. Bereken de overige waarden van N .

Uitwerking

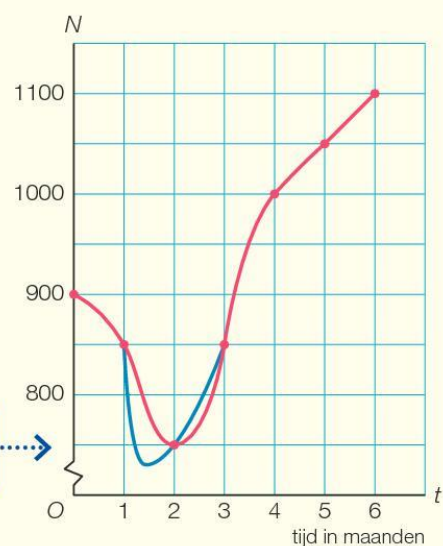
a

t	N	
0	900	
1	850	-50
2	750	-100
3	850	+100
4	1000	+150
5	1050	+50
6	1100	+50

1 april→

Zie de rode grafiek.

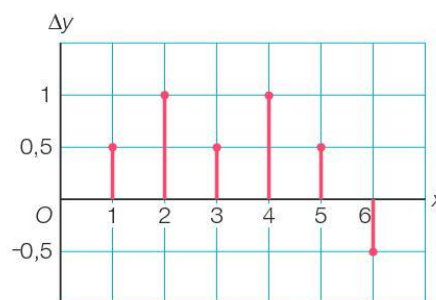
Merk op dat elke grafiek door de zeven gevonden punten bij het toenamediagram past.



- Ja, dat kan kloppen, zie de blauwe grafiek hiernaast.

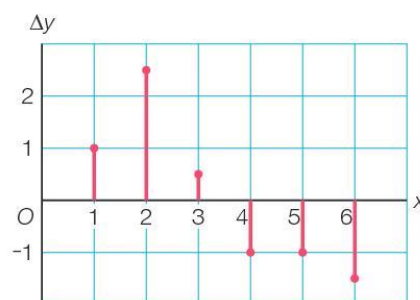
- R7** Zie vraag b van het voorbeeld.
□ ⊗ * Zou het aantal konijnen minimaal geweest kunnen zijn in maart?

- 8** Gegeven is het toenamediagram in figuur 8.15.
□ ⊗ * De bijbehorende grafiek gaat door het punt (2, 3).
a Teken een grafiek bij deze gegevens.
b Waarom zijn er meerdere grafieken mogelijk?
 Teken met een andere kleur nog een mogelijke grafiek in de figuur van vraag a.
c Teken het toenamediagram met $\Delta x = 2$ op het interval $[0, 6]$.



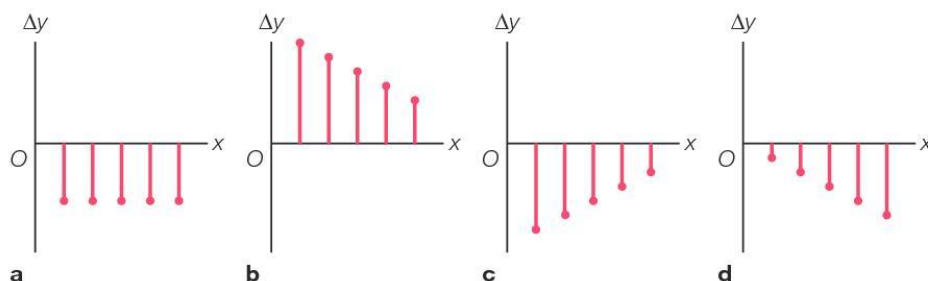
figuur 8.15

- 9** Gegeven is het toenamediagram in figuur 8.16.
□ ⊗ **a** Teken een grafiek die bij het toenamediagram hoort en die door het punt (3, -2) gaat.
b Er is gegeven dat de grafiek die bij het toenamediagram hoort maar één maximum heeft.
 Kan dit maximum optreden bij $x = 2,5$? En bij $x = 1,5$? Licht toe.



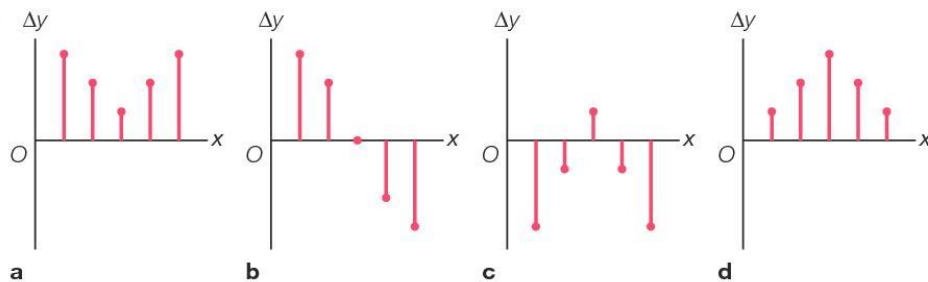
figuur 8.16

- 10** In een toenamediagram van een grafiek kun je de verschillende soorten van stijgen en dalen herkennen.
□ ⊗ Zoek bij de toenamediagrammen in figuur 8.17 de juiste soort van stijgen of dalen. Kies uit: toenemend stijgend, afnemend stijgend, constant stijgend, toenemend dalend, afnemend dalend en constant dalend.



figuur 8.17

- 11** Schets mogelijke grafieken bij de volgende toenamediagrammen.
□ ⊗ *

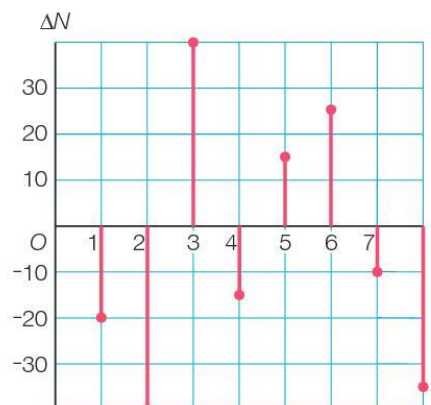


figuur 8.18

A12

In Nationaal Park De Hoge Veluwe kun je gebruikmaken van witte leenfietsen. Op een aantal plekken in het park zijn stallingen waar je een fiets kunt meenemen of wegzetten. Een beheerder van het park houdt op een dag vanaf 9:00 uur bij hoeveel fietsen er in één van de stallingen staan. Zie het toenamediagram in figuur 8.19 waarin t de tijd in uren is met $t = 0$ om 9:00 uur en N het aantal fietsen in de stalling. Om 15:00 uur stonden er 110 fietsen in de stalling.

- Hoeveel fietsen stonden er om 17:00 uur in de stalling? En om 9:00 uur?
- Tussen 10:00 en 11:00 uur hebben in totaal 30 personen een fiets in de stalling gezet. Hoeveel fietsen zijn er tussen 10:00 en 11:00 uur meegenomen?

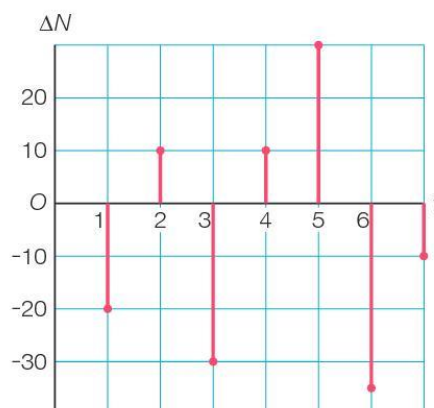


figuur 8.19

**A13**

Op een zonnige dag houdt Daan bij hoeveel mensen er op een groot terras zitten. Zie het toenamediagram in figuur 8.20 met t de tijd in uren en $t = 0$ om 15:00 uur en N het aantal mensen op het terras.

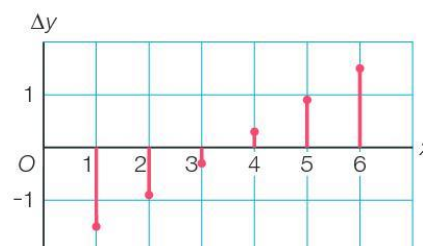
Onderzoek hoeveel mensen er om 15:00 uur minstens op het terras hebben gezeten.



figuur 8.20

E14

Bij het toenamediagram in figuur 8.21 hoort een grafiek met één minimum. Voor welke waarden van x kan dit minimum optreden? Geef een zo groot mogelijk interval.



figuur 8.21

015



In 2017 passeerde Nederland de grens van 17 miljoen inwoners. In de tabel kun je ΔN voor verschillende perioden de toename van het aantal inwoners N in miljoenen aflezen.

BEVOLKING VAN NEDERLAND

periode	ΔN
1840-1940	5,8
1940-1970	4,2
1970-1990	1,9
1990-2010	1,6
2010-2020	0,8

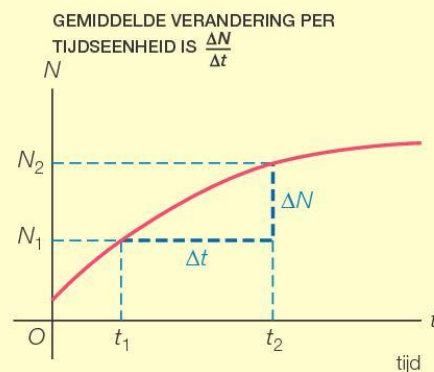


Stijn bekijkt de tabel en zegt: 'Er is sinds 1840 sprake van een afnemende stijging.' Welke fout maakt Stijn?

Theorie C Gemiddelde veranderingen

Om veranderingen van inwoneraantallen N te vergelijken, gebruik je ΔN . Het ligt voor de hand om te zeggen: 'Hoe groter ΔN , des te sterker verandert N .' Maar je moet hiermee voorzichtig zijn, want ook de lengte Δt van het tijdsinterval speelt een rol.

Om de veranderingen goed met elkaar te vergelijken, bekijk je de **gemiddelde veranderingen** per tijdseenheid.



figuur 8.22

Zo geldt voor de tabel in opgave 15:

- voor de periode 1840-1940 neemt N met 5,8 toe, dus de gemiddelde verandering is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{5,8}{100} = 0,058$ miljoen per jaar
- voor de periode 1940-1970 neemt N met 4,2 toe, dus de gemiddelde verandering is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{4,2}{30} = 0,14$ miljoen per jaar.

$\frac{\Delta N}{\Delta t}$ is de gemiddelde verandering van N per tijdseenheid.

16



In de tabel staat informatie over het aantal woningen N in miljoenen in Nederland.

WONINGVOORRAAD NEDERLAND

jaar	1920	1947	1964	1970	1980	1987	1995	2000	2019
N	1,37	2,12	3,15	3,75	4,85	5,59	6,30	6,59	7,82

- a** Met hoeveel neemt N toe in de periode 1980-1987? Wat is de gemiddelde toename per jaar in deze periode?

Hieronder is een begin gemaakt van de tabel met periode, Δt , ΔN en $\frac{\Delta N}{\Delta t}$.

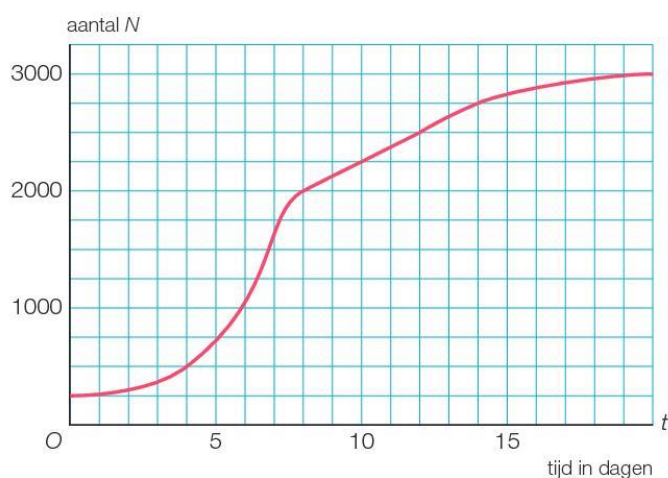
periode	Δt	ΔN	$\frac{\Delta N}{\Delta t}$
1920-1947	27	0,75	0,028
...	...	...	...

- b** Neem de tabel over en vul verder in.
c In welke periode is de gemiddelde toename het grootst?
d Trek een conclusie over het verloop van de woningvoorraad in Nederland.

17



In figuur 8.23 is de groei weergegeven van een populatie fruitvliegjes in een afgesloten ruimte.



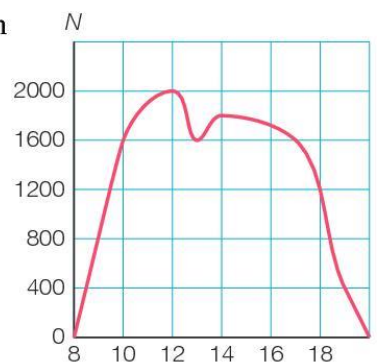
figuur 8.23

- a** Bereken de gemiddelde toename per dag van het aantal fruitvliegjes gedurende de eerste tien dagen.
b Hoe kun je in de figuur zien dat de gemiddelde toename per dag op $[2, 8]$ groter is dan op $[10, 14]$?
c Zeg zonder berekening op welk interval de gemiddelde toename per dag het grootst is en ook op welk interval het kleinst. Kies uit $[0, 4]$, $[4, 8]$, $[8, 12]$ en $[12, 20]$.

A18


In figuur 8.24 is het aantal auto's N op een parkeerterrein bij een dierentuin uitgezet tegen de tijd t in uren. Het betreft een zaterdag in mei.

- Bereken $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ op het interval $[9, 13]$.
- Bereken de gemiddelde verandering van N op het interval $[12, 17]$.
- Geef een interval waarop de gemiddelde toename 100 auto's per uur is.
- Geef een interval waarop de gemiddelde afname 200 auto's per uur is.

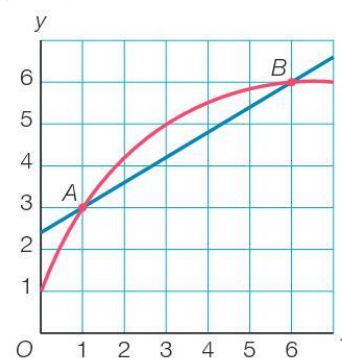


figuur 8.24

O19


Op de grafiek hiernaast liggen de punten $A(1, 3)$ en $B(6, 6)$.

- Bereken de gemiddelde toename van y op het interval $[1, 6]$.
- Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn door A en B .
- Vergelijk de antwoorden van a en b. Wat valt je op?



figuur 8.25

Theorie D Differentiequotiënten

Op het interval $[1, 6]$ in figuur 8.26 is $\Delta x = 6 - 1 = 5$ en $\Delta y = 5 - 2 = 3$.

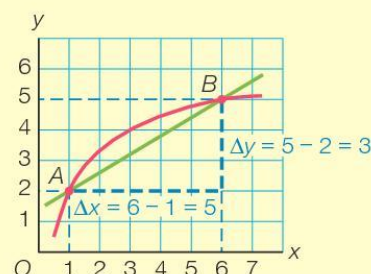
De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5} = 0,6$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ heet het **differentiequotiënt** van y op het interval $[1, 6]$.

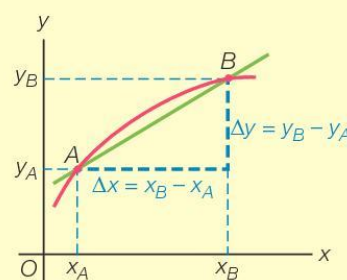
Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is de richtingscoëfficiënt van de lijn AB in figuur 8.26. In plaats van 'de richtingscoëfficiënt van de lijn AB ' zeggen we ook 'de **helling** van de lijn AB '.

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van y op $[x_A, x_B]$ is

- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (oftewel de helling) van de lijn AB
- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



figuur 8.26



Voorbeeld

Zie figuur 8.27.

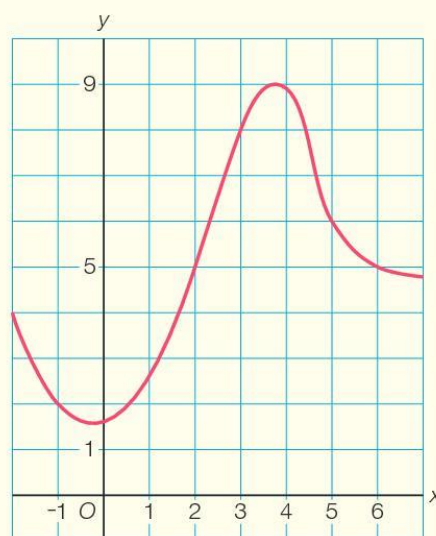
- a Bereken de gemiddelde verandering van y op het interval $[-1, 3]$.
- b Bereken het differentiequotient op $[3, 5]$.

Uitwerking

- a De gemiddelde verandering op $[-1, 3]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 2}{3 - (-1)} = \frac{6}{4} = 1,5.$$

- b Op $[3, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 8}{5 - 3} = \frac{-2}{2} = -1.$



figuur 8.27

20

Zie figuur 8.27.



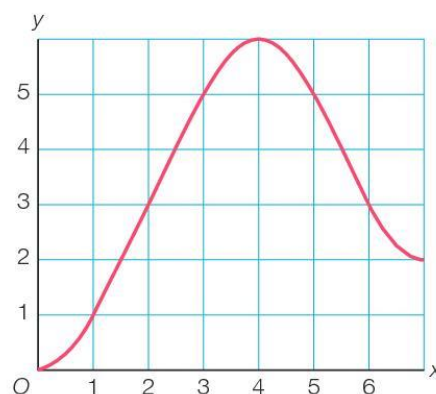
- a Bereken de gemiddelde verandering van y op het interval $[2, 5]$.
- b Bereken het differentiequotient op $[-1, 5]$.
- c Noem een interval waarop de gemiddelde verandering van y nul is.

21

Zie figuur 8.28.



- a Bereken het differentiequotient op $[1, 3]$.
- b Bereken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op $[4, 6]$. Wat betekent het dat je antwoord negatief is?
- c Bereken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op $[2, 7]$.
- d Noem een interval waarop de gemiddelde verandering gelijk is aan 0.
- e Noem een interval waarop $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gelijk is aan 1,5.



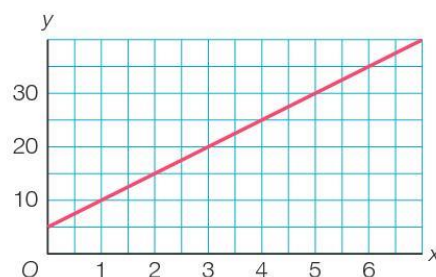
figuur 8.28

R22



Zie figuur 8.29. De grafiek is een lijn.

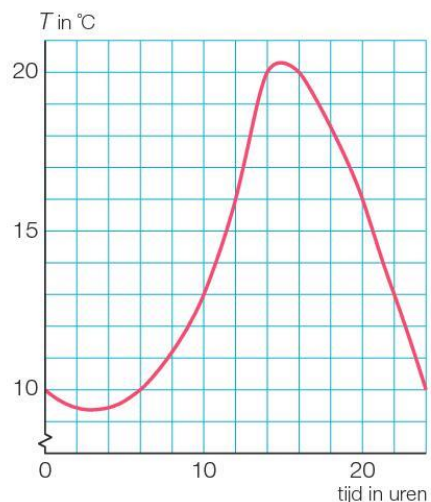
- a Bereken het differentiequotient op de intervallen $[0, 2]$, $[2, 5]$, $[5, 6]$ en $[6, 10]$.
- b Wat kun je zeggen van de differentiequotienten als de grafiek een lijn is?



figuur 8.29

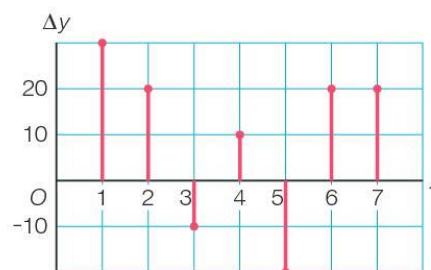
A23 [WERKBLAD] De grafiek in figuur 8.30 gaat over het verloop van de temperatuur op een dag in mei.

- Bereken $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ op $[6, 10]$ en op $[9, 14]$.
- Geef een interval waarop de gemiddelde verandering $-0,3^\circ\text{C/uur}$ is.
- Voor welke t is de gemiddelde toename van de temperatuur op $[0, t]$ gelijk aan die op het interval $[0, 10]$? Licht je antwoord toe met behulp van het werkblad.
- Voor welke t is de gemiddelde toename van de temperatuur op $[0, t]$ maximaal? Licht je antwoord toe met behulp van het werkblad.



figuur 8.30

A24 Zie het toenamediagram in figuur 8.31. Bereken de differentiequotiënten op de intervallen $[0, 7]$ en $[2, 6]$.



figuur 8.31

E25 Van een grafiek is het volgende bekend: de grafiek gaat door het punt $(0, 2)$ en

- op $[0, 2]$ is het differentiequotiënt $\frac{1}{4}$
 - op $[0, 5]$ is het differentiequotiënt $\frac{1}{5}$
 - op $[1, 3]$ is het differentiequotiënt $1\frac{1}{2}$
 - op $[1, 5]$ is het differentiequotiënt $\frac{1}{2}$.
- Bereken het differentiequotiënt op $[3, 5]$.
 - Is het mogelijk dat het differentiequotiënt op $[1, 4]$ gelijk is aan $1\frac{1}{2}$? Licht toe.

A26 Gegeven is de kostenformule $K = q^3 - 6q^2 + 13q + 15$. Hierin is K in duizenden euro's en q de productie in duizendtallen. De productie is maximaal 8000 stuks.

- Bereken het differentiequotiënt van K op het interval $[4, 6]$. Vergeet niet de eenheid te vermelden.
- Bereken de gemiddelde toename van de kosten in euro's per stuk als de productie toeneemt van 2000 tot 5000 stuks.
- Bereken de gemiddelde toename van K in euro's per stuk als de productie toeneemt van 3600 tot 6100 stuks.

K in duizenden euro's en q in duizendtallen, dus de gemiddelde verandering van K is in euro's per stuk.

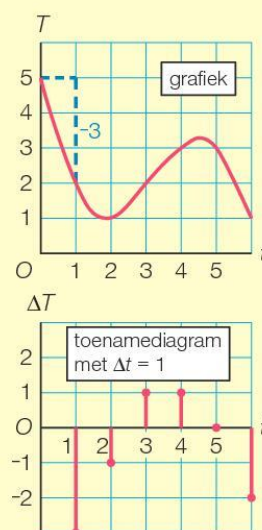
Terugblik

Toenamediagram

Om bij de grafiek hiernaast het toenamediagram te tekenen met $\Delta t = 1$, lees je bij stapgrootte $\Delta t = 1$ de veranderingen ΔT uit de grafiek af.

interval	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, 4]	[4, 5]	[5, 6]
ΔT	-3	-1	1	1	0	-2

Vervolgens zet je de veranderingen ΔT uit tegen t en verbind je de punten door een verticaal lijnstuk met de t -as. Teken elk verticaal lijnstuk boven de rechtergrens van het interval, dus het eerste lijnstuk bij $t = 1$, het tweede bij $t = 2$, enzovoort.



Differentiequotiënt

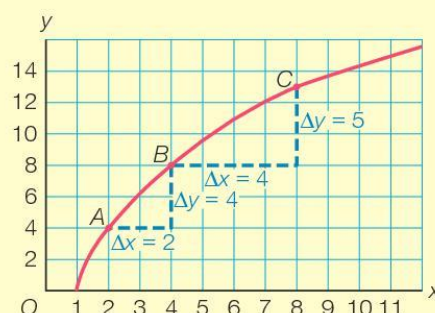
Om veranderingen op intervallen van verschillende lengte te vergelijken, gebruik je differentiequotiënten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is de gemiddelde verandering van y op een interval.

In de figuur hiernaast kun je aflezen:

- Op het interval $[2, 4]$ is $\Delta y = 4$ en $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$.
- Op het interval $[4, 8]$ is $\Delta y = 5$ en $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{4} = 1,25$.

Dat de grafiek afnemend stijgend is, wordt bevestigd door de differentiequotiënten 2 en 1,25. Uit alleen $\Delta y = 4$ en $\Delta y = 5$ valt hier geen conclusie te trekken over de soort van stijgen.



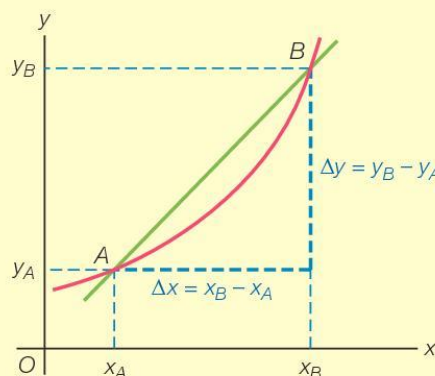
Differentiequotiënt en richtingscoëfficiënt (helling)

Het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

De volgende begrippen komen op hetzelfde neer:

- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (helling) van de lijn AB .



8.2 Hellinggrafieken

027
□ ⊗ *

De weg tussen Lochem en Zutphen heeft een lengte van 10 km en de maximumsnelheid is 80 km/uur.

Walter rijdt dit traject op 5 november in 8 minuten.

a Bereken zijn gemiddelde snelheid in km/uur.

Enkele dagen later krijgt Walter een bekeuring wegens te hard rijden op het traject Lochem-Zutphen op 5 november. Volgens Walter klopt het niet, want zijn gemiddelde snelheid was minder dan 80 km/uur.

b Wat ziet Walter over het hoofd?

Theorie A Snelheid en raaklijn

De tijd-afstandgrafiek in figuur 8.32 hoort bij de formule $s = \frac{1}{2}t^3$ met t de tijd in seconden en s de afgelegde afstand in meters.

We vragen ons af hoe we met deze formule de snelheid op één moment, bijvoorbeeld op $t = 4$ kunnen krijgen.

Daartoe bekijken we de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[4, 5]$, $[4; 4,5]$, $[4; 4,1]$, $[4; 4,01]$, ... Zo krijgen we een steeds betere benadering van de snelheid op $t = 4$.

De gemiddelde snelheid $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ op het interval

- $[4, 5]$ is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 5^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{5 - 4} = 30,5 \text{ m/s}$

- $[4; 4,5]$ is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4,5^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0,5} = 27,125 \text{ m/s}$

- $[4; 4,1]$ is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4,1^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0,1} = 24,605 \text{ m/s}$

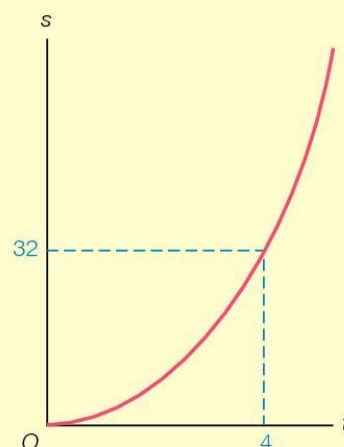
- $[4; 4,01]$ is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4,01^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0,01} \approx 24,060 \text{ m/s}$.

De gemiddelde snelheid op het kleine interval $[4; 4,01]$ geeft een goede benadering van de snelheid op $t = 4$.

Je krijgt het vermoeden dat de snelheid op $t = 4$ gelijk is aan 24 m/s.

Als controle kun je $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ berekenen op een nog kleiner interval,

bijvoorbeeld op $[4; 4,001]$. Je krijgt $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4,001^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0,001} \approx 24,006 \text{ m/s}$.



figuur 8.32

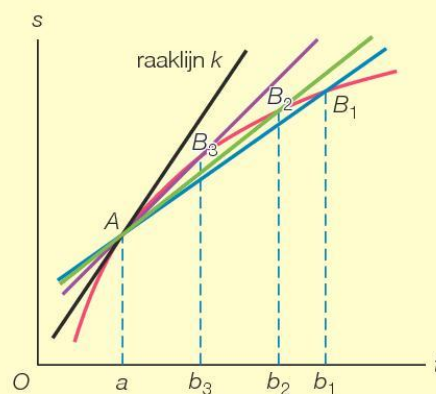
In figuur 8.33 zie je een tijd-afstandgrafiek. Door de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[a, b_1]$, $[a, b_2]$, $[a, b_3]$, ... te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = a$.

De gemiddelde snelheden zijn gelijk aan de richtingscoëfficiënten van de lijnen AB_1 , AB_2 , AB_3 , ...

Hoe dichterbij A komt te liggen, des te meer zal de lijn AB lijken op de lijn k die de grafiek in A raakt.

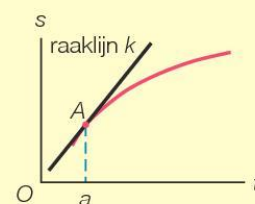
De lijn k is de **raaklijn** van de grafiek in A .

De snelheid op $t = a$ is dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A .



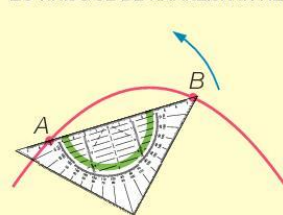
figuur 8.33

In een tijd-afstandgrafiek is de snelheid op $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het bijbehorende punt.

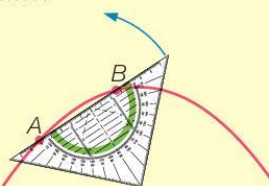


Hieronder zie je hoe je de raaklijn tekent in het punt A van een grafiek.

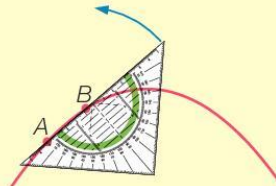
ZO KRIJG JE DE RAAKLIJN IN HET PUNT A



Draai de geodriehoek om het punt A .



Het punt B komt steeds dichterbij het punt A te liggen.

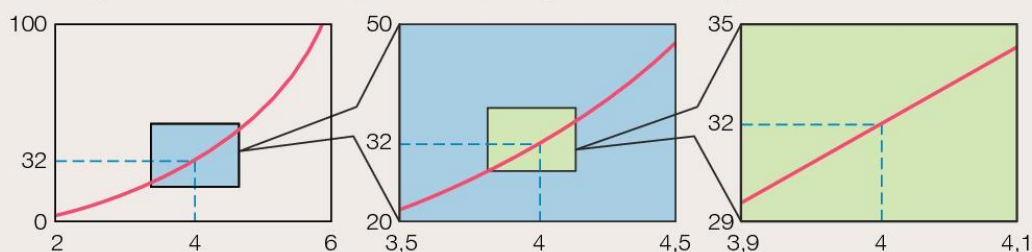


Zodra B samenvalt met A is de lijn AB overgegaan in de raaklijn in A .

INFORMATIEF

Inzoomen op de grafiek

In de figuren hieronder is ingezoomd op de grafiek van $s = \frac{1}{2}t^3$.



Hoe meer je inzoomt, hoe meer de grafiek op een rechte lijn gaat lijken.

De helling van deze lijn geeft de snelheid op $t = 4$.

Zoom je in op de grafiek bij $t = 3$, dan geeft de helling de snelheid op $t = 3$.

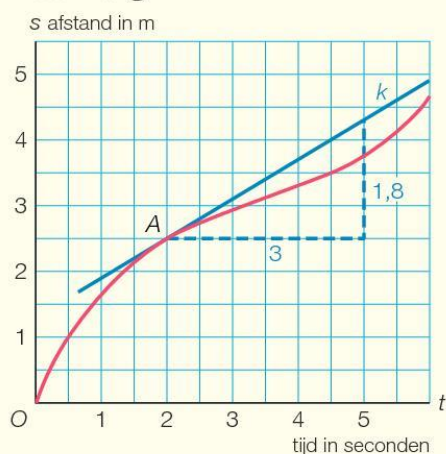
Voorbeeld

Zie de grafiek in figuur 8.34.
Schat de snelheid op $t = 2$.

Aanpak

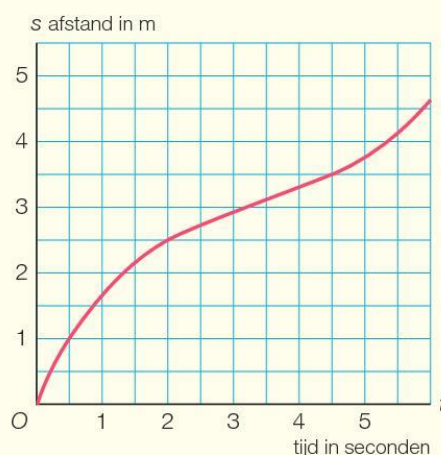
Teken de raaklijn k in het punt op de grafiek met $t = 2$. Bereken rc_k door twee geschikte punten op k te kiezen en de bijbehorende Δt en Δs af te lezen. Neem Δt voldoende groot.

Uitwerking



$$rc_k = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{1,8}{3} = 0,6$$

De snelheid op $t = 2$ is ongeveer 0,6 m/s.



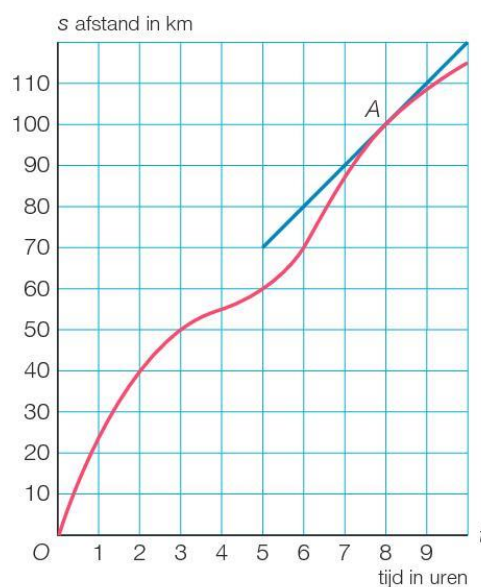
figuur 8.34

Voor Δs neem je het verschil van de s -coördinaten van twee punten op de raaklijn en dus niet op de grafiek. Je moet immers de rc van de raaklijn hebben.

28

[WERKBLAD] In figuur 8.35 zie je een tijd-afstandgrafiek.

- a In het punt A is de raaklijn van de grafiek getekend. Schat de snelheid op $t = 8$.
- b Schat de snelheid op $t = 3$.
- c Neemt de snelheid gedurende de eerste vier uur toe of af? Hoe zie je dat aan de grafiek?
- d Voor welke t schat je dat de snelheid minimaal is?



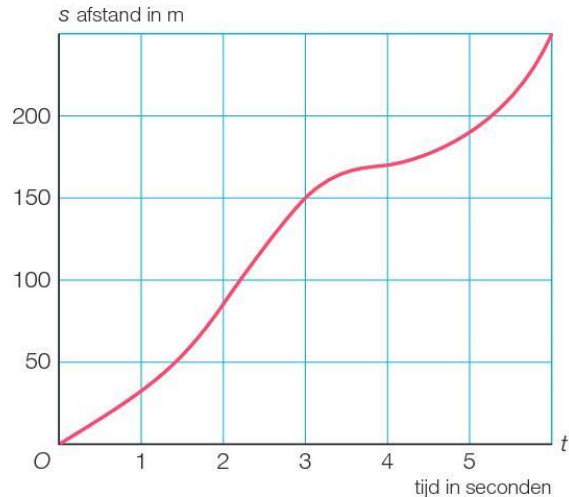
figuur 8.35

29



[▶ WERKBLAD] Gegeven is de tijd-afstandgrafiek in figuur 8.36.

- Schat de snelheid in gehele m/s op $t = 3$ en op $t = 5$.
- Voor welke t is de snelheid minimaal?
- Voor welke t is de gemiddelde snelheid op $[2, t]$ minimaal? Licht toe.
- Hoeveel tijdstippen zijn er tussen $t = 0$ en $t = 6$ waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[0, 6]$? Licht toe.



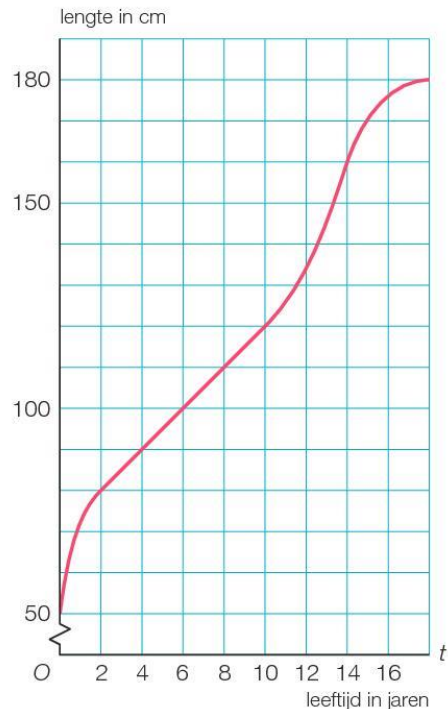
figuur 8.36

A30



[▶ WERKBLAD] Meneer Kruize heeft vanaf de geboorte van zijn dochter Lotte elke maand haar lengte gemeten. De resultaten staan in figuur 8.37.

- Geef een schatting van de groeisnelheid in cm/jaar op $t = 6$.
- Schat de groeisnelheid in cm/jaar van Lotte rond haar veertiende verjaardag.
- Bereken de gemiddelde groeisnelheid in cm/jaar van 0 tot 18 jaar.
- Op welke leeftijden is de groeisnelheid van Lotte gelijk aan de bij c gevraagde snelheid?



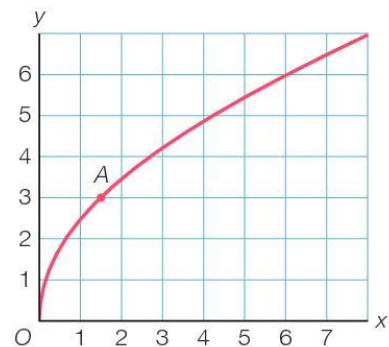
figuur 8.37

031



[▶ WERKBLAD] Op het werkblad staat de grafiek van $y = \sqrt{6x}$ en het punt $A(1,5; 3)$ op de grafiek.

- Bereken het differentiequotiënt op $[1,5; 1,51]$. Rond af op twee decimalen.
- Teken de raaklijn k in het punt A en geef rc_k .
- Vergelijk het antwoord van vraag a met rc_k . Wat valt je op?



figuur 8.38

Theorie B Raaklijn en richtingscoëfficiënt

Voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A bestaat de

notatie $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$. Spreek uit: dy dx voor x is x_A .

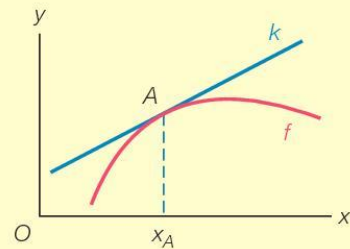
In plaats van

de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A
zeggen we ook

de helling van de grafiek in het punt A .

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ is

- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A
- de helling van de grafiek in A
- de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.



[►GR] De GR heeft een optie om bij een gegeven formule $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ te berekenen. Hoe dat gaat leer je in de module **Helling**.

Voorbeeld

Gegeven is de kostenformule $K = 0,04q^2 + 0,3q + 20$ met K in duizenden euro's en de productie q in duizenden kg.

Bereken de snelheid waarmee de kosten veranderen bij een productie van 6600 kg.

Uitwerking

Bij een productie van 6600 kg hoort $q = 6,6$.

Voer in $y_1 = 0,04x^2 + 0,3x + 20$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=6,6} = 0,828$.

De snelheid is 0,83 euro per kg.

De snelheid waarmee K verandert voor $q = 6,6$ is in duizenden euro's per 1000 kg, dat is in euro's per kg.

32

Gegeven is de formule $K = 0,04q^2 + 0,3q + 20$ van het voorbeeld met de kosten K in duizenden euro's en de productie q in duizenden kg.

Bereken de snelheid waarmee de kosten veranderen

- a voor $q = 20$
- b bij een productie van 3200 kg
- c bij een productie van 8160 kg.

33



Het aantal vissen in een vijver is gegeven door $N = \frac{2000}{1 + 12 \cdot 0,95^t}$.

Hierin is N het aantal vissen en t de tijd in weken met $0 \leq t \leq 120$.

- Bereken de snelheid waarmee het aantal vissen toeneemt op $t = 10$.
- Arjen beweert dat de snelheid waarmee het aantal vissen toeneemt op $t = 33$ ongeveer twee keer zo groot is als op $t = 10$.
Onderzoek of Arjen gelijk heeft.
- Tess beweert dat de snelheid waarmee het aantal vissen toeneemt steeds groter wordt.
Toon aan dat Tess niet gelijk heeft.

A34



Frank is getroffen door de griep.

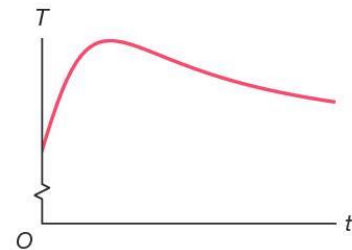
Zijn lichaamstemperatuur wordt gegeven door de formule

$$T = 37 + \frac{45t}{t^2 + 70}.$$

Hierin is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en t de

tijd in uren met $t = 0$ op 1 mei om 12:00 uur en $0 \leq t \leq 50$.

- Met welke snelheid neemt de temperatuur van Frank toe op 1 mei om 17:30 uur?
- Met welke snelheid neemt de temperatuur van Frank af op 2 mei om 8:00 uur?
- Wat is de maximale lichaamstemperatuur van Frank?
Op welke dag en hoe laat is de griep op zijn hoogtepunt?
- Hoelang is de lichaamstemperatuur boven 39°C ?



figuur 8.39

035



Het aantal personen N dat zich op een zaterdag in een warenhuis bevindt, is te benaderen door de formule

$$N = -1,5t^3 + 12t^2.$$

Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 9:00 uur.

- Voer in $y_1 = -1,5x^3 + 12x^2$ en controleer dat $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=4} = 24$. Welke informatie geeft dit getal?
- Reken na dat $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=6} = -18$.
- Vul in *toe* of *af*.
 $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=4} > 0$, dus het aantal aanwezigen neemt ... om 13:00 uur.
 $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=6} < 0$, dus het aantal aanwezigen neemt ... om 15:00 uur.



Theorie C Aantonen dat y toeneemt voor $x = a$

Met behulp van $\frac{dy}{dx}$ kun je onderzoeken of y

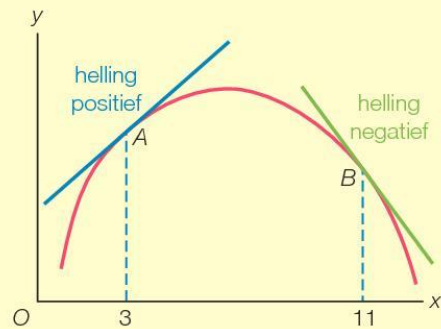
toeneemt of dat y afneemt voor $x = a$.

Zie figuur 8.40.

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} > 0$, dus de helling in het punt A is positief.

We zeggen dat y toeneemt voor $x = 3$.

En zo volgt uit $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=11} < 0$ dat y afneemt voor $x = 11$.



figuur 8.40

Is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} > 0$, dan neemt y toe voor $x = a$.

Is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} < 0$, dan neemt y af voor $x = a$.

Voorbeeld

Het aantal werknemers van een bedrijf is te benaderen door het model $N = \frac{1000t - 10t^2}{t + 1}$. Hierin is N het aantal werknemers en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2010.

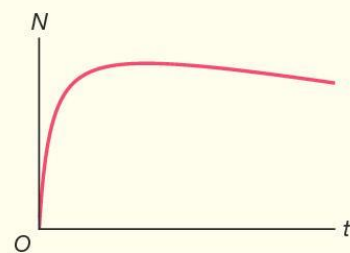
Toon aan dat het aantal werknemers op 1 juli 2020 afnam.

Uitwerking

Bij 1 juli 2020 hoort $t = 10,5$.

Voer in $y_1 = \frac{1000x - 10x^2}{x + 1}$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=10,5} \approx -2,4 < 0$, dus op 1 juli 2020 nam het aantal werknemers af.



figuur 8.41

36



Zie het voorbeeld.

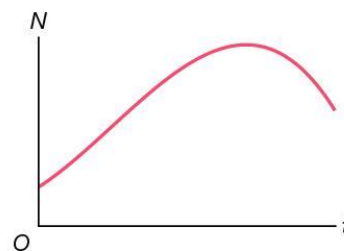
- Omschrijf de betekenis van het getal $-2,4$ in de uitwerking.
- Toon aan dat het aantal werknemers op 1 juli 2015 toenam.
- Met hoeveel nam het aantal werknemers toe in het jaar 2015?
- Bereken het maximale aantal werknemers. In welk jaar was het aantal werknemers maximaal?

A37



Het aantal rendieren N in een natuurpark in Canada is gegeven door de formule $N = -0,2t^3 + 4,5t^2 + 80t + 500$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1995.

- Toon aan dat het aantal rendieren op 1 januari 2005 toenam.
- Toon aan dat het aantal rendieren op 1 juli 2020 over het hoogtepunt heen was.
- Bereken de snelheid waarmee het aantal rendieren afneemt op 1 oktober 2023.
- Voor welke t is de snelheid waarmee het aantal rendieren verandert gelijk aan 0? Rond af op één decimaal.



figuur 8.42



038

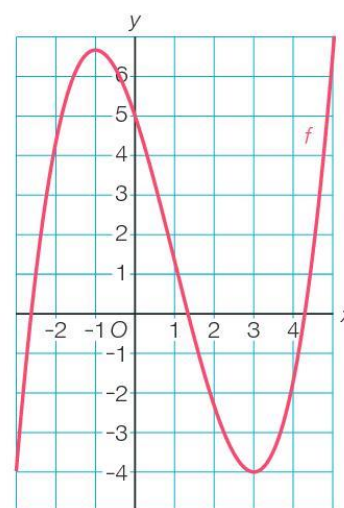


[▶ WERKBLAD] In figuur 8.43 zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$.

- Vul in *positief* of *negatief*.
De grafiek is stijgend op $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ en op $\langle 3, \rightarrow \rangle$, dus de helling in de bijbehorende punten is ...
De grafiek is dalend op $\langle -1, 3 \rangle$, dus de helling in de bijbehorende punten is ...
- Wat weet je van de helling van de grafiek in de toppen?
- In de tabel zie je dat bij het punt op de grafiek met x -coördinaat -3 de helling van de grafiek gelijk is aan 12. Vul de tabel verder in. Gebruik de GR.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
helling	12	5						

- Teken de punten die uit de tabel volgen en teken door deze punten een vloeiende kromme.



figuur 8.43

Theorie D Hellinggrafiek schetsen

Bij de functie f van opgave 38 hoort bij elke waarde van x één waarde van y . Zo is $f(0) = 5$ en $f(3) = -4$.

Bij elke waarde van x hoort één helling van de grafiek. Zo ontstaat een nieuwe functie: de **hellingfunctie**. De grafiek van de hellingfunctie heet de **hellinggrafiek**.

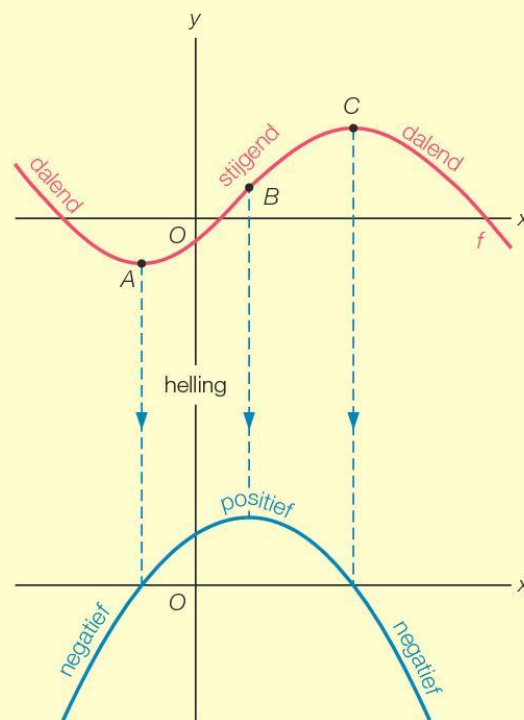
Uit een gegeven grafiek van f kun je bijzonderheden van de hellinggrafiek afleiden.

- Bij een *dalend* deel van de grafiek van f horen *negatieve* hellingen, dus de hellinggrafiek ligt daar onder de x -as.
- In een *top* van de grafiek van f is de helling nul. De hellinggrafiek snijdt de x -as.
- Bij een *stijgend* deel van de grafiek van f horen *positieve* hellingen, dus de hellinggrafiek ligt daar boven de x -as.

Bekijk in figuur 8.44 hoe de hellinggrafiek samenhangt met de grafiek van f .

Je ziet dat de toppen A en C de snijpunten opleveren van de hellinggrafiek met de x -as.

Tussen A en C stijgt de grafiek van f , dus daar ligt de hellinggrafiek boven de x -as. In het punt B is de helling maximaal. Dit geeft het hoogste punt van de hellinggrafiek.



hellinggrafiek van f

figuur 8.44 De hellinggrafiek van f hangt samen met de grafiek van f .

Het verband tussen de grafiek van f en de hellinggrafiek van f .

- grafiek van f is stijgend hoort bij hellinggrafiek boven de x -as
- grafiek van f is dalend hoort bij hellinggrafiek onder de x -as
- grafiek van f heeft top hoort bij hellinggrafiek snijdt de x -as

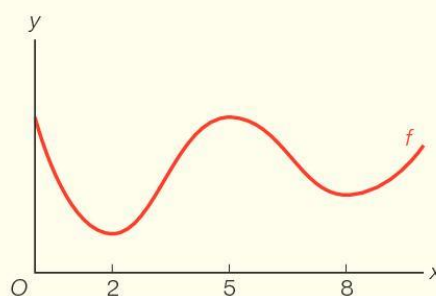
Voorbeeld

Zie de figuur hiernaast met de grafiek van de functie f .

Schets de hellinggrafiek van f .

Aanpak

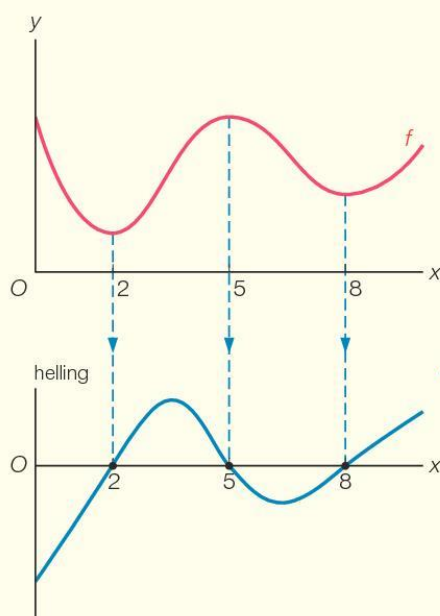
	grafiek van f	hellinggrafiek van f
$\langle \leftarrow, 2 \rangle$	dalend	onder de x -as
$x = 2$	top	snijdt de x -as
$\langle 2, 5 \rangle$	stijgend	boven de x -as
$x = 5$	top	snijdt de x -as
$\langle 5, 8 \rangle$	dalend	onder de x -as
$x = 8$	top	snijdt de x -as
$\langle 8, \rightarrow \rangle$	stijgend	boven de x -as



figuur 8.45

Teken eerst de punten waar de hellinggrafiek de x -as snijdt.

Uitwerking



Met stippellijnen geef je de samenhang tussen de grafieken aan.

39
Werkblad

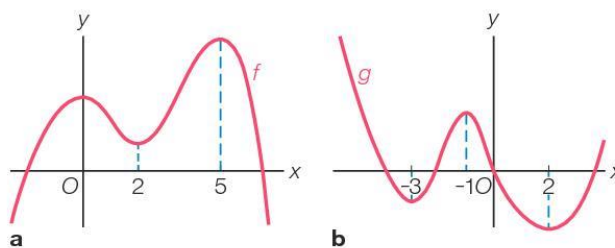
[WERKBLAD]

a In figuur 8.46a zie je de grafiek van een functie f .

Schets de hellinggrafiek van f .

b In figuur 8.46b zie je de grafiek van een functie g .

Schets de hellinggrafiek van g .

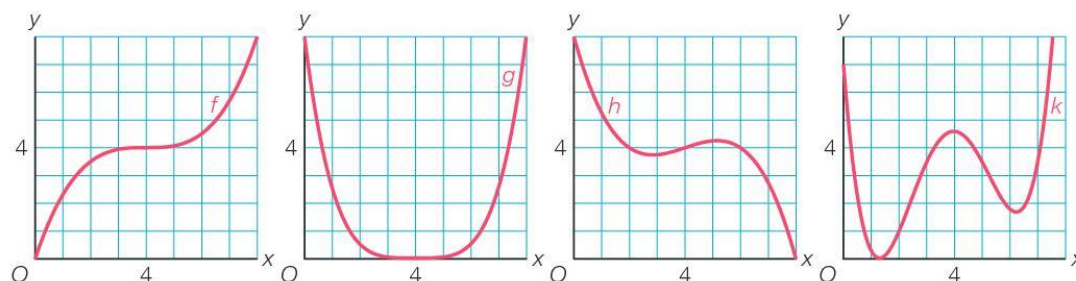


figuur 8.46

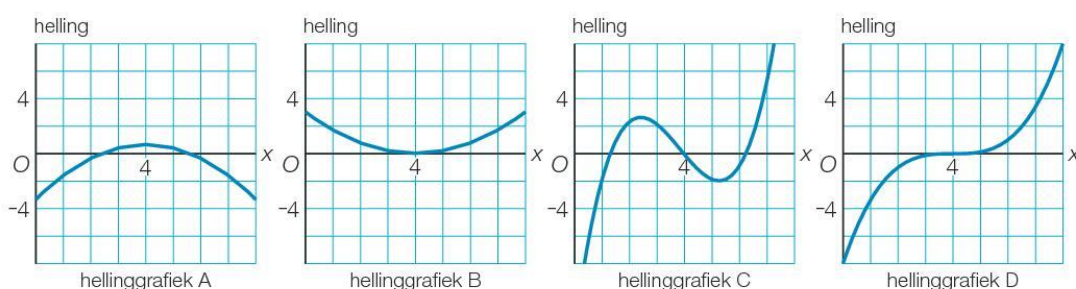
40


Van de functies f , g , h en k zijn in figuur 8.47 de grafieken getekend. De bijbehorende hellinggrafieken staan in een andere volgorde in figuur 8.48.

Zoek bij elk van de functies f , g , h en k de juiste hellinggrafiek.



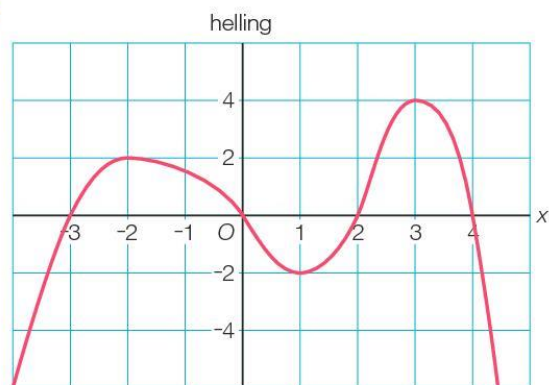
figuur 8.47



figuur 8.48

41


[>WERKBLAD] Hieronder is de hellinggrafiek van een functie f gegeven.

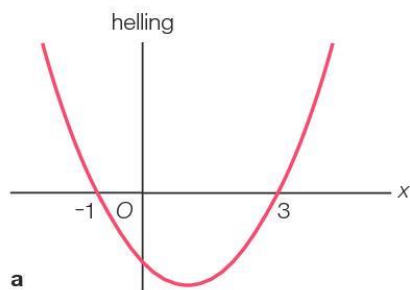


figuur 8.49

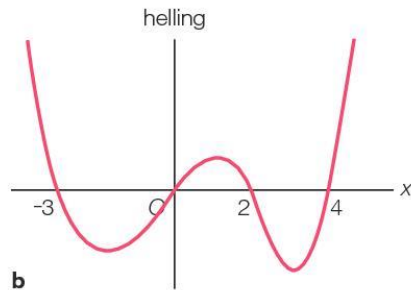
- Voor $x < -3$ ligt de hellinggrafiek onder de x -as. Licht toe dat hieruit volgt dat de grafiek van f dalend is op $\langle \leftarrow, -3 \rangle$.
- Waarom heeft de grafiek van f een top bij $x = -3$? Is dat een hoogste of een laagste punt?
- Is de grafiek van f stijgend of dalend op $\langle -3, 0 \rangle$?
- Heeft de grafiek van f een hoogste of een laagste punt bij $x = 0$?
- Schets een mogelijke grafiek van f .



- a** In figuur 8.50a zie je de hellinggrafiek van een functie f .
Schets een mogelijke grafiek van f .
- b** In figuur 8.50b zie je de hellinggrafiek van een functie g .
Schets een mogelijke grafiek van g .



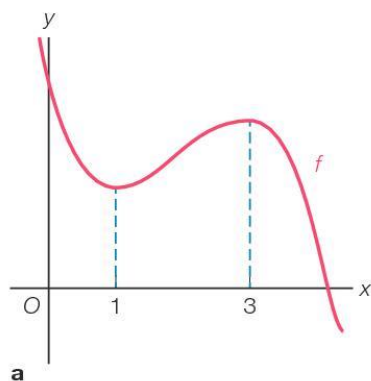
a



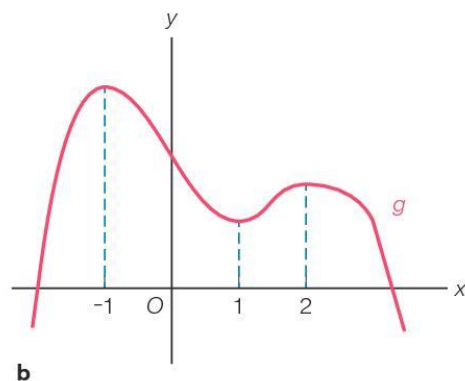
b

figuur 8.50

[▶ WERKBLAD] Gegeven zijn de grafieken van de functies f en g in figuur 8.51.



a



b

figuur 8.51

- a** Schets de hellinggrafiek van f .
- b** Schets de hellinggrafiek van g .
- c** Neem aan dat de grafiek van f de hellinggrafiek is van een functie h .
Schets een mogelijke grafiek van h .
- d** Neem aan dat de grafiek van g de hellinggrafiek is van een functie k .
Schets een mogelijke grafiek van k .

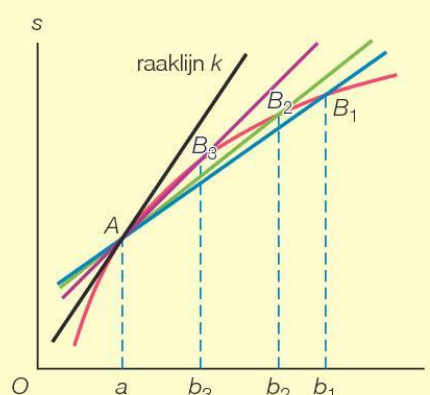
Terugblik

Snelheid en raaklijn

Door bij een tijd-afstandgrafiek de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[a, b_1]$, $[a, b_2]$, $[a, b_3]$, ... te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = a$.

De gemiddelde snelheden zijn gelijk aan de hellingen van de lijnen AB_1 , AB_2 , AB_3 , ...

Hoe dichter B bij A komt te liggen, des te meer de lijn AB gaat lijken op de lijn k die in A de grafiek raakt. Bij een tijd-afstandgrafiek is de snelheid op $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het bijbehorende punt.



De richtingscoëfficiënt van een raaklijn

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ is de

- helling van de grafiek in A
- richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A
- snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.

De GR heeft een optie om $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ te berekenen.

Hiernaast zie je de grafiek van $R = 5,4q^{0,8} - 2,5q$.

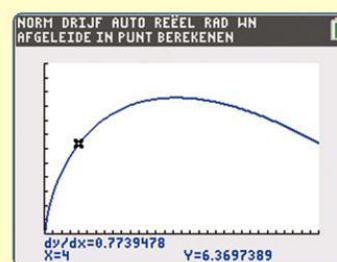
De snelheid waarmee R verandert voor $q = 4$ krijg je als volgt.

Voer in $y_1 = 5,4x^{0,8} - 2,5x$. De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=4} \approx 0,77$.

Omdat $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=4} > 0$ weet je dat de grafiek van R stijgend

is voor $q = 4$. Dus R neemt toe voor $q = 4$.

Omdat $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=25} \approx -0,23 < 0$ weet je dat R afneemt voor $q = 25$.

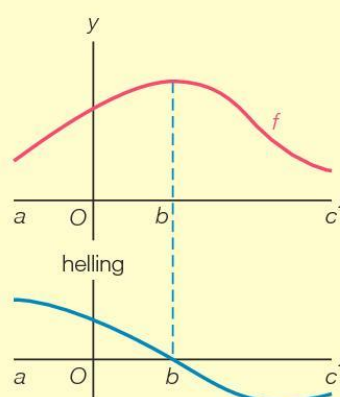


Hellinggrafieken schetsen

Bij een functie f hoort een hellingfunctie, die voor elke x de waarde geeft van de helling van de grafiek van f in het bijbehorende punt. De grafiek van de hellingfunctie heet de hellinggrafiek van f . Bij een gegeven grafiek van een functie f kun je de hellinggrafiek schetsen.

Je gebruikt:

	grafiek van f	hellinggrafiek
$\langle a, b \rangle$	stijgend	boven de x -as
$x = b$	top	snijdt de x -as
$\langle b, c \rangle$	dalend	onder de x -as



8.3 Differentiëren

044



In figuur 8.52 zie je de grafiek van de functie

$f(x) = 0,75x^2$ en de hellinggrafiek van f .

De hellinggrafiek van f is een rechte lijn.

a Geef de formule van deze lijn.

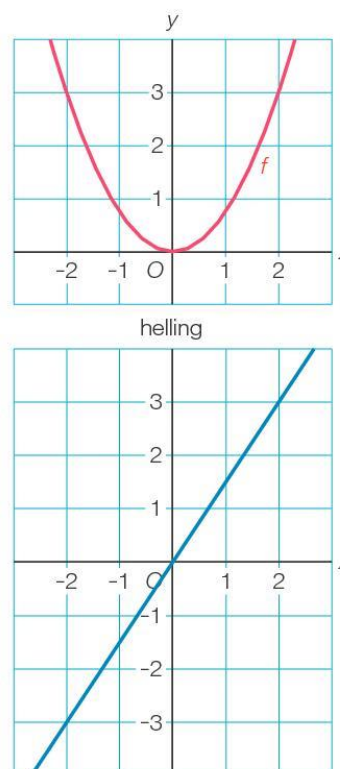
Gegeven is de functie $g(x) = 3x$. De hellinggrafiek van g is een horizontale lijn.

b Geef hiervoor een verklaring.

c Welke formule hoort bij die lijn?

Gegeven is de functie $h(x) = -4$. De hellinggrafiek van h is een horizontale lijn.

d Welke formule hoort bij die lijn?



figuur 8.52

Theorie A Afgeleide functie

Bij een functie hoort een hellingfunctie. In plaats van hellingfunctie wordt meestal de naam **afgeleide functie**, kortweg **afgeleide** gebruikt. De afgeleide van f wordt genoteerd als f' . Spreek uit f accent.

Het is prettig als je van een functie f direct de formule van de afgeleide f' kunt opschrijven.

In opgave 44 heb je gezien:

van $f(x) = 0,75x^2$ is de afgeleide $f'(x) = 1,5x$.

Dit is een voorbeeld van de regel:

van $f(x) = ax^2$ is de afgeleide $f'(x) = a \cdot 2x$.

Ook heb je gezien:

van $g(x) = 3x$ is de afgeleide $g'(x) = 3$.

Dit is een voorbeeld van de regel:

van $f(x) = ax$ is de afgeleide $f'(x) = a$.

Verder heb je gezien:

van $h(x) = -4$ is de afgeleide $h'(x) = 0$.

Dit is een voorbeeld van de regel:

van $f(x) = a$ is de afgeleide $f'(x) = 0$.

Regels voor de afgeleide

$$\begin{array}{lll} f(x) = a & \text{geeft} & f'(x) = 0 \\ f(x) = ax & \text{geeft} & f'(x) = a \\ f(x) = ax^2 & \text{geeft} & f'(x) = a \cdot 2x \end{array}$$

Het berekenen van de formule van de afgeleide heet **differentiëren**.

Om $f(x) = 5x^2 + 8x + 3$ te differentiëren, neem je term voor term de afgeleide.

Dus $f(x) = 5x^2 + 8x + 3$ geeft

$$f'(x) = 5 \cdot 2x + 8 + 0 = 10x + 8.$$

Je hebt hier een voorbeeld van de **somregel voor het differentiëren**.

Om $f(x) = (3x - 2)(5x + 3)$ te differentiëren, werk je eerst de haakjes weg en gebruik je ook de **verschilregel voor het differentiëren**.

$$\text{Dus } f(x) = (3x - 2)(5x + 3) = 15x^2 + 9x - 10x - 6 = 15x^2 - x - 6.$$

$$\text{Dit geeft } f'(x) = 30x - 1.$$

De somregel voor het differentiëren

$$s(x) = f(x) + g(x) \text{ geeft}$$

$$s'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = -4x^2 - 3x + 17$

b $g(t) = (5t - 7)^2$

Uitwerking

a $f(x) = -4x^2 - 3x + 17$ geeft $f'(x) = -8x - 3$

b $g(t) = (5t - 7)^2 = 25t^2 - 70t + 49$ geeft $g'(t) = 50t - 70$

45 Differentieer.



a $f(x) = 5x^2 - 7x + 5$

c $h(x) = 0,02x^2 + 1,7x$

b $g(x) = -2\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$

d $k(x) = 7x + 10$

46 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = (2x - 7)(8 + x)$

c $V(t) = 100 - (t^2 - 6t)$

b $g(p) = -12p^2 + 30p$

d $K(q) = -0,01q^2 + 20q$

A47 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = 3x - 2(x^2 + 1)$

c $g(x) = 3(2x - 3)^2$

b $P(q) = 0,05q^2 - 200q$

d $h(a) = 50 - (\frac{1}{2}a - 4)^2$

A48 Differentieer.



a $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x)$

c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(x - 1) + 8$

b $g(x) = (3x + 6)^2$

d $k(x) = -3(x - 1)(5 - 2x) - 8(x - 7)$

A49

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$.

De formule van de hellinggrafiek is $y = \frac{1}{2}x - 2$.

a Licht dit toe.

b Bereken met de formule van de hellinggrafiek de helling voor $x = 6$.

c Bereken voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -1 .

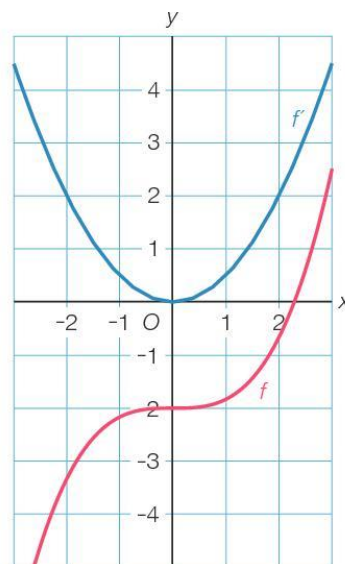
O50

In figuur 8.53 zie je de grafiek van $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2$ en de hellinggrafiek van f .

De hellinggrafiek is een parabool. Er geldt $f'(x) = ax^2$.

Je ziet dat de grafiek van f' door het punt $(2, 2)$ gaat.

Bereken a .



figuur 8.53

Theorie B De afgeleide van $f(x) = ax^n$

In opgave 50 heb je gezien dat gezien dat

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2 \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Algemeen:

$$f(x) = ax^3 \text{ geeft } f'(x) = a \cdot 3x^2.$$

En zo kun je nagaan dat

$$f(x) = ax^4 \text{ geeft } f'(x) = a \cdot 4x^3 \text{ en}$$

$$f(x) = ax^5 \text{ geeft } f'(x) = a \cdot 5x^4.$$

$$f(x) = ax^n \text{ geeft } f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$$

In het voorbeeld op de volgende bladzijde moet bij onderdeel c de afgeleide van $h(x) = 3px^5 - 5x + p$ worden berekend. Hierbij is p een constante. Daarom is de afgeleide van $3px^5$ gelijk aan $3p \cdot 5x^4 = 15px^4$ en is de afgeleide van p gelijk aan 0.

nieuwe exponent 1 minder

$$f(x) = 4x^3 \text{ geeft } f'(x) = 4 \cdot 3x^2$$

oude exponent ervoor

$$h(x) = 3px^5 - 5x + p$$

oude exponent ervoor nieuwe exponent 1 minder p is een constante, dus afgeleide is 0

$$h'(x) = 3p \cdot 5x^4 - 5 + 0$$

Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 10x^7 - 6x^4 - 3$

b $g(t) = -3t^5 + 3t^2 + 4$

c $h(x) = 3px^5 - 5x + p$

Uitwerking

a $f(x) = 10x^7 - 6x^4 - 3$ geeft $f'(x) = 70x^6 - 24x^3$

b $g(t) = -3t^5 + 3t^2 + 4$ geeft $g'(t) = -15t^4 + 6t$

c $h(x) = 3px^5 - 5x + p$ geeft $h'(x) = 15px^4 - 5$

51 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$

b $g(x) = -2x^7 - 3x^5 + 3,4$

c $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12$

d $k(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3$

52 Differentieer.



a $f(x) = 3(2x + 1)^2$

b $g(x) = 7(3x - 2)(x^2 + 2x)$

c $h(x) = 3px^8 - px^4$

d $k(x) = x^3 + a$

53 Bereken de afgeleide.



a $W(q) = -0,02q^2 + 8q - 5$

b $N(t) = 5t^3 + 8t^2 - t$

c $R(q) = 5q(q - 70)^2$

d $L(a) = -0,006a^4 + 0,2a^3(a - 5) - 8$

A54 Differentieer.



a $f(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x)$

b $g(x) = x^5(x^3 - 4x) - 2x$

c $N(t) = (3t^3 - 1)^2$

d $F(a) = 0,16a^2(Q - 3a)$

A55 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 5$.



a Bereken de formule van de hellinggrafiek.

b Bereken met de formule van de hellinggrafiek de helling voor $x = 4$.

c Bereken voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -1 .

E56*****

De regel $f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ is een voorbeeld van de algemene regel $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$, waarbij c een constante is.

Gegeven is dat van de functie $h(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ de afgeleide is

$$h'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}.$$

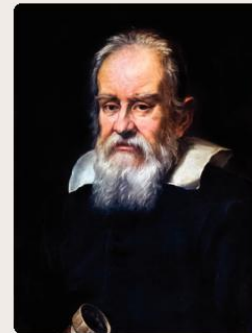
Bereken de afgeleide van de functie $k(x) = \frac{4x-2}{3x+3}$.

GESCHIEDENIS

Differentiaalrekening

Zo omstreeks 1600 was de wetenschap volop in ontwikkeling. De Italiaanse geleerde Galileo Galilei probeerde de beweging van een vallend voorwerp te beschrijven met een formule. Men zegt dat hij hierbij kogeltjes liet vallen van de scheve toren van Pisa. Een ander probleem waar de wetenschap naarstig een oplossing voor zocht, was de wiskundige beschrijving van de baan van een kanonskogel. Dit was een probleem dat zich gezien de talloze vijandelijkheden in Europa in een grote belangstelling mocht verheugen.

Ook waren geleerden druk bezig met het bestuderen van de planeetbanen. En dan waren er nog twee eeuwenoude problemen uit de tijd van de Grieken waarmee men nog steeds worstelde. Hoe vind je de oppervlakte van een gebied ingesloten door willekeurige krommen? En hoe krijg je de formule van de raaklijn in een punt aan een willekeurige kromme? Veel wetenschappers hielden zich in de 17^e eeuw met dit soort problemen bezig en stukje bij beetje ontwikkelde zich de theorie van de differentiaalrekening. Maar voor het zover was, moest er heel wat gebeuren. Onafhankelijk van elkaar slaagden Newton (omstreeks 1670) en Leibniz (1675) er ten slotte in een allesomvattende theorie te ontwikkelen.



Galileo Galilei

Terugblik

Afgeleide functie

De hellingfunctie van een functie f wordt meestal de afgeleide functie van f genoemd, kortweg de afgeleide van f .

Voor de afgeleide bestaat de notatie f' .

Het berekenen van de formule van de afgeleide heet differentiëren.

Regels voor differentiëren

Met de volgende regels kun je van enkele functies direct de formule van de afgeleide geven.

$$f(x) = a \text{ geeft } f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax \text{ geeft } f'(x) = a$$

$$f(x) = ax^n \text{ geeft } f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$$

Met differentiëren krijg je de formule van de hellinggrafiek.

De afgeleide van $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 8x - 6$ krijg je door term voor term te differentiëren.

$$\text{Dus } f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 8x - 6 \text{ geeft } f'(x) = 15x^2 - 14x + 8.$$

Om de afgeleide van $g(x) = 5(3x - 1)(x^3 - 4x)$ te berekenen, werk je eerst de haakjes weg.

$$g(x) = 5(3x - 1)(x^3 - 4x) = 5(3x^4 - 12x^2 - x^3 + 4x) = 15x^4 - 5x^3 - 60x^2 + 20x$$

$$\text{Dus } g'(x) = 60x^3 - 15x^2 - 120x + 20.$$

In $f(x) = 5x^3 + 4px^2 + p^2$ is p een constante. Daarom is van $4px^2$ de afgeleide $4p \cdot 2x = 8px$ en is van p^2 de afgeleide 0.

$$\text{Dus } f(x) = 5x^3 + 4px^2 + p^2 \text{ geeft } f'(x) = 15x^2 + 8px.$$

Helling en afgeleide

Met de formule van de afgeleide van een functie f kun je voor elke x de helling van de grafiek van f berekenen.

Om met de formule van de afgeleide de helling van de grafiek van $f(x) = 0,25x^4 - x^3 - 0,5x$ in het punt $A(4, -2)$ te berekenen, gebruik je dat deze helling gelijk is aan $f'(4)$.

Je krijgt $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 0,5$, dus de helling is

$$f'(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 0,5 = 15,5.$$

Om te berekenen voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 3,5, los je de vergelijking $f'(x) = 3,5$ op.

Invoeren van $y_1 = x^3 - 3x^2 - 0,5$ en $y_2 = 3,5$ en het gebruik van de optie snijpunt geeft $x = 2$. Dus voor $x = 2$ is de helling van de grafiek van f gelijk aan 3,5.

8.4 Notaties en regels voor de afgeleide

057



- a** Gegeven is de functie $f(x) = 5x^2 + 3a^4$.
Bereken $f'(x)$.
- b** Gegeven is de functie $f(a) = 5x^2 + 3a^4$.
Bereken $f'(a)$.
- c** De afgeleide van $y = 8x^3$ wordt soms genoteerd als $y' = 24x^2$.
Noem een nadeel van de notatie met y' als je $y = 5x^2 + 3a^4$ moet differentiëren.

Theorie A Notaties voor de afgeleide

Er zijn verschillende notaties voor de afgeleide van $y = f(x)$.

Behalve $f'(x)$ komt ook de notatie $\frac{dy}{dx}$ voor.

Dus de afgeleide van $y = 3x^2 + 8x$ is $\frac{dy}{dx} = 6x + 8$.

Bij $N = t^3 + 5t^2$ is niet x maar t de variabele.

Je krijgt $N = t^3 + 5t^2$ geeft $\frac{dN}{dt} = 3t^2 + 10t$.

Er is **naar t gedifferentieerd**.

$R = -0,01q^2 + 10q$ geeft $\frac{dR}{dq} = -0,02q + 10$

Er is naar q gedifferentieerd.

De **d-notatie** is vooral handig als in een formule twee of meer variabelen voorkomen. Je kunt dan zien naar welke variabele gedifferentieerd is.

Bij $y = 5x^3 + a^2$ is

- $\frac{dy}{dx} = 15x^2 + 0 = 15x^2$ y is naar x gedifferentieerd.
- $\frac{dy}{da} = 0 + 2a = 2a$. y is naar a gedifferentieerd.

Afspraak

Notaties voor de afgeleide van $y = f(x)$ zijn $\frac{dy}{dx}$ en $f'(x)$.

58



Gegeven zijn de formules $y = 7x^4 - a^3$, $R = q^3 - 5pq$ en $B = a^3 - 3t^2$.
Bereken.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a $\frac{dy}{dx}$ | c $\frac{dR}{dq}$ | e $\frac{dB}{dt}$ |
| b $\frac{dy}{da}$ | d $\frac{dR}{dp}$ | f $\frac{dB}{da}$ |

A59
□ ⊗ *

Gegeven is de formule $R = 5a^2 - 3ab^3 - 5abc + 5a - 3$.

Bereken $\frac{dR}{da}$, $\frac{dR}{db}$ en $\frac{dR}{dc}$.

O60
□ ⊗ *

Je weet dat $\frac{5}{x^2}$ te schrijven is als $5x^{-2}$ en dat $3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$.

Schrijf in de vorm $y = ax^n$.

a $y = \frac{10}{x^3}$

c $y = \frac{2}{x}$

e $y = 4x\sqrt{x}$

b $y = 8 \cdot \sqrt[3]{x}$

d $y = \frac{7}{\sqrt{x}}$

f $y = \frac{3}{4x^2 \cdot \sqrt{x}}$

Theorie B De afgeleide van $y = ax^n$ met negatieve en gebroken n

Om de afgeleide van $y = x^{-1}$ te krijgen, gebruik je de regel

$$y = ax^n \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = a \cdot nx^{n-1}.$$

$$\text{Je krijgt } y = x^{-1} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2}.$$

De regel $y = ax^n$ geeft $\frac{dy}{dx} = a \cdot nx^{n-1}$ geldt voor elke n .

$$\text{Voor } a = 4 \text{ en } n = -2 \text{ krijg je } y = 4x^{-2} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 4 \cdot -2x^{-2-1} = -8x^{-3}.$$

$$\text{Voor } a = 7 \text{ en } n = 0,6 \text{ krijg je } y = 7x^{0,6} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 7 \cdot 0,6x^{0,6-1} = 4,2x^{-0,4}.$$

Je kunt nu ook de afgeleide van $y = \frac{5}{x^2} + 3x^4 + 2$ berekenen.

$$\text{Immers } y = \frac{5}{x^2} + 3x^4 + 2 = 5x^{-2} + 3x^4 + 2, \text{ dus}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cdot -2x^{-3} + 3 \cdot 4x^3 = -10x^{-3} + 12x^3 = -\frac{10}{x^3} + 12x^3.$$

$$\text{En bij } y = x\sqrt{x} \text{ krijg je } y = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}, \text{ dus } \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Afspraak

Schrijf de afgeleide zonder negatieve en gebroken exponent(en), tenzij de gegeven formule al een gebroken of negatieve exponent bevat.

$$\text{Dus bij } f(x) = x^{1,3} \text{ laat je } f'(x) = 1,3x^{0,3} \text{ staan.}$$

$$\text{Bij } g(x) = 6x^2 \cdot \sqrt[3]{x} \text{ krijg je: } g(x) = 6x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = 6x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 6x^{\frac{7}{3}} \text{ geeft}$$

$$g'(x) = 6 \cdot \frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} = 14 \cdot x^{\frac{4}{3}} = 14x \cdot \sqrt[3]{x}.$$

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = \frac{3}{x} + 5x^2$

b $g(q) = 5\sqrt{q} + 2q$

c $h(a) = \frac{1}{5a^2}$

d $k(x) = 6x^2 \cdot \sqrt{x}$

Uitwerking

a $f(x) = \frac{3}{x} + 5x^2 = 3x^{-1} + 5x^2$ geeft $f'(x) = -3x^{-2} + 10x = -\frac{3}{x^2} + 10x$

b $g(q) = 5\sqrt{q} + 2q = 5q^{\frac{1}{2}} + 2q$ geeft
 $g'(q) = 2^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} + 2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} + 2 = \frac{5}{2\sqrt{q}} + 2$

c $h(a) = \frac{1}{5a^2} = \frac{1}{5} a^{-2}$ geeft $h'(a) = -\frac{2}{5} a^{-3} = -\frac{2}{5a^3}$

d $k(x) = 6x^2 \cdot \sqrt{x} = 6x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 6x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $k'(x) = 15x^{1\frac{1}{2}} = 15x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 15x\sqrt{x}$

61

Differentieer.



a $f(x) = \frac{6}{x^3} + 6x^3$

d $l(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{2p^2}$

b $g(x) = 3x^6 - \frac{4}{x}$

e $h(x) = 3x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$

c $m(t) = 12t \cdot \sqrt[4]{t}$

f $k(q) = \frac{1}{q}$

A62

Bereken de afgeleide.



a $y = x + \frac{4}{\sqrt{x}}$

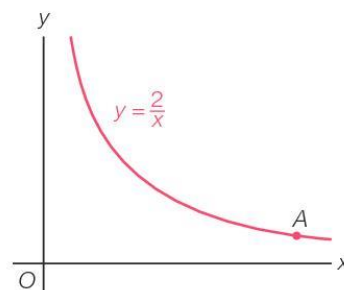
d $y = 10x^{1,72} + \frac{6}{x^{1,35}}$

b $y = 3x^2 \cdot \sqrt{x}$

e $y = \frac{2}{5x} + \frac{5x}{2}$

c $y = 3x - x^{-1,65}$

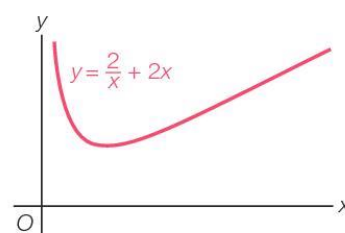
f $y = (1+x)\sqrt{x}$

63Hiernaast zie je de grafiek van $y = \frac{2}{x}$ met $x > 0$.**a** Op de grafiek ligt het punt A met $x_A = 4$.Bereken y_A en de helling van de grafiek in A .**b** Bereken met de afgeleide de helling van de grafiek in het punt B met $x_B = 1$.**c** Bereken met behulp van differentiëren de snelheid waarmee y verandert voor $x = 5$.**d** Beredeneer hoe uit de formule van de afgeleide van y volgt dat de grafiek van y dalend is.**figuur 8.54**

64
□ ⊙ *

Hiernaast zie je de grafiek van $y = \frac{2}{x} + 2x$ met $x > 0$.

- Bereken met de afgeleide met welke snelheid y toeneemt voor $x = 4$.
- Toon met de afgeleide aan dat de helling van de grafiek in het punt $P(\frac{1}{2}, 5)$ negatief is.
- Toon met de afgeleide aan dat de raaklijn in het punt $Q(1, 4)$ horizontaal is.



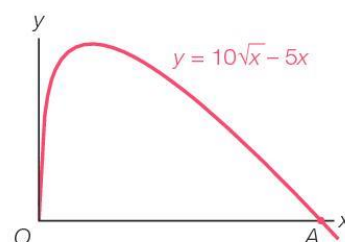
figuur 8.55

A65
□ ⊙ *

In figuur 8.56 zie je de grafiek van $y = 10\sqrt{x} - 5x$.

De grafiek snijdt de positieve x -as in het punt A .

- Toon aan dat $x_A = 4$ en bereken met de afgeleide de helling van de grafiek in A .
- Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee y verandert voor $x = \frac{1}{4}$.
- Toon met de afgeleide aan dat de raaklijn in het punt $B(1, 5)$ horizontaal is.

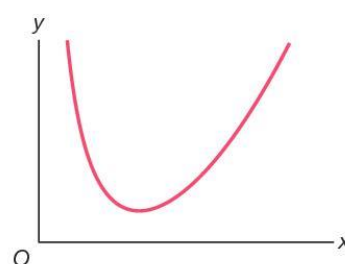


figuur 8.56

A66
*

In figuur 8.57 zie je de grafiek van $y = x^2 + \frac{16}{x} - 9$ met $x > 0$.

- Toon met de afgeleide aan dat y afneemt voor $x = 1,5$.
- Bereken voor welke waarde van x de helling van de grafiek gelijk is aan 7.
- Bereken met de afgeleide met hoeveel procent de helling van de grafiek toeneemt tussen $x = 5$ en $x = 6$.



figuur 8.57

O67
□ ⊙ *

Gegeven is de functie $k(x) = (3x^3 + 7)^2$. De formule van k is te noteren als $k(x) = f(g(x))$ met $f(g) = g^2$ en $g(x) = 3x^3 + 7$. Noteer op dezelfde manier met functies f en g .

- $k(x) = (3 - x^5)^6$
- $k(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- $k(x) = \frac{2}{(x + 8)^3}$

Theorie C De kettingregel

De functie $k(x) = (x^2 - 5x)^4$ is een voorbeeld van een **samengestelde functie**. De functie is samengesteld uit de **schakels** $f(g) = g^4$ en $g(x) = x^2 - 5x$.

Een functie die geschreven is als een ketting van schakels heet ook wel een **kettingfunctie**.

Voor het differentiëren van de functie k gebruik je de **kettingregel**.

Kettingregel

$k(x) = f(g(x))$ geeft $k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Bij $k(x) = (x^2 - 5x)^4$ krijg je $k'(x) = \underbrace{4(x^2 - 5x)^3}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{(2x - 5)}_{g'(x)}$.

Bij het differentiëren van $k(x) = \sqrt{3x + 1}$ krijg je

$$k(x) = \sqrt{3x + 1} = (3x + 1)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } k'(x) = \frac{1}{2}(3x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}.$$

Voorbeeld

Differentieer.

a $A = 4(t^2 - 3t)^{0,4}$

b $y = \frac{5}{(2x - 7)^4}$

c $N = 2p + \sqrt{3p^2 + 4}$

Uitwerking

a $A = 4(t^2 - 3t)^{0,4}$ geeft $\frac{dA}{dt} = 1,6(t^2 - 3t)^{-0,6} \cdot (2t - 3)$

b $y = \frac{5}{(2x - 7)^4} = 5(2x - 7)^{-4}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -20(2x - 7)^{-5} \cdot 2 = -\frac{40}{(2x - 7)^5}$

c $N = 2p + \sqrt{3p^2 + 4} = 2p + (3p^2 + 4)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dN}{dp} = 2 + \frac{1}{2}(3p^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6p = 2 + \frac{6p}{2\sqrt{3p^2 + 4}} = 2 + \frac{3p}{\sqrt{3p^2 + 4}}$

68

Differentieer.

a $y = -3(2x - 5)^6$ **d** $y = \frac{8}{\sqrt{3x + 2}}$

b $y = (4x^2 - x)^{1,4}$ **e** $y = \frac{4}{(2 - x^2)^3}$

c $y = 2\sqrt{3 - 7x}$ **f** $y = x^2 + \sqrt{x^2 + x}$

69
□ ⊗ *

Gegeven zijn $S = \frac{2}{(3-a^2)^5}$, $K = \sqrt{2q+1}$ en $W = 6(p^2 - 2p + 5)^{0,7}$.

Bereken.

- a $\frac{dS}{da}$
- b $\frac{dK}{dq}$
- c $\frac{dW}{dp}$

A70
□ ⊗ *

Bereken de afgeleide.

- a $K = (5q + 2)^4 - 3q$
- b $y = \frac{5}{(2x+1)^8} + 4x^2$
- c $B = \frac{8}{a^3} + 6\sqrt{a^3+2}$
- d $P = \sqrt[3]{3q-5}$

E71
*

Er geldt $y = \sqrt{x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

a Toon dit aan.

De regel $y = \sqrt{x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ kun je gebruiken om in

één keer de afgeleide van $y = \sqrt{3x+1}$ op te schrijven.

Je krijgt $y = \sqrt{3x+1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.

b Gebruik deze regel om in één keer de afgeleide op te schrijven van de formules in de opgaven 68c, 69b en 70c.

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \text{ geeft}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x).$$

Terugblik

Notaties voor de afgeleide van $y = f(x)$

Voor de afgeleide van $y = f(x)$ worden de notaties $\frac{dy}{dx}$ en $f'(x)$ gebruikt.

Bij $y = 3x^3 + 5a^2x - 2x$ is $\frac{dy}{dx} = 9x^2 + 5a^2 - 2$ en $\frac{dy}{da} = 10ax$.

De afgeleide van $y = ax^n$

De afgeleide van $y = ax^n$ is $\frac{dy}{dx} = a \cdot nx^{n-1}$.

Deze formule geldt voor elke a en voor elke n .

• $y = \frac{10}{x^3} = 10x^{-3}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 10 \cdot -3x^{-4} = -30x^{-4} = -\frac{30}{x^4}$

• $y = 5x^{1,6}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 8x^{0,6}$

• $y = 8 \cdot \sqrt[4]{x} = 8x^{\frac{1}{4}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2x^{-\frac{3}{4}} = \frac{2}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$

• $M = \frac{8}{t^{2,5}} + 15t^{0,3} = 8t^{-2,5} + 15t^{0,3}$ geeft $\frac{dM}{dt} = -20t^{-3,5} + 4,5t^{-0,7}$

Als in een formule van y gebroken en/of negatieve exponenten voorkomen, mag je zulke exponenten in de afgeleide laten staan.

De kettingregel

Een functie die geschreven is als een ketting van functies heet een kettingfunctie of samengestelde functie.

Zo is de functie $k(x) = \sqrt{x^2 + x}$ te schrijven als $k(x) = f(g(x))$ met de schakels $f(g) = \sqrt{g}$ en $g(x) = x^2 + x$.

Bij het differentiëren van kettingfuncties gebruik je de kettingregel:

$k(x) = f(g(x))$ geeft $k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Deze regel zegt dat de afgeleide van een kettingfunctie het product is van de afgeleiden van de afzonderlijke schakels.

Bij $k(x) = \sqrt{x^2 + x} = (x^2 + x)^{\frac{1}{2}}$ krijg je $k'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$.

Om $N = \frac{6}{(2a - 1)^3} - 5a^2$ te differentiëren, schrijf je eerst $N = 6(2a - 1)^{-3} - 5a^2$.

Je krijgt $\frac{dN}{da} = 6 \cdot -3(2a - 1)^{-4} \cdot 2 - 10a = \frac{-36}{(2a - 1)^4} - 10a$.

8.5 Extreme waarden en de afgeleide

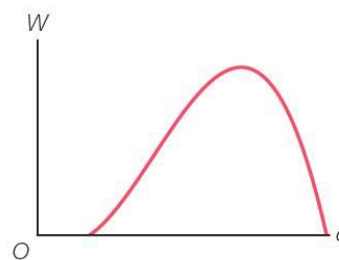
072
□ ⊗ *

Hiernaast zie je de grafiek van $W = -0,1q^3 + 12q^2 - 210q + 500$ met $10 \leq q \leq 100$.

a Bereken $\frac{dW}{dq}$.

b Toon met de afgeleide aan dat $\left[\frac{dW}{dq}\right]_{q=70} = 0$.

Wat volgt hieruit voor het punt op de grafiek dat bij $q = 70$ hoort?



figuur 8.58

Theorie A Extreme waarden berekenen met de afgeleide

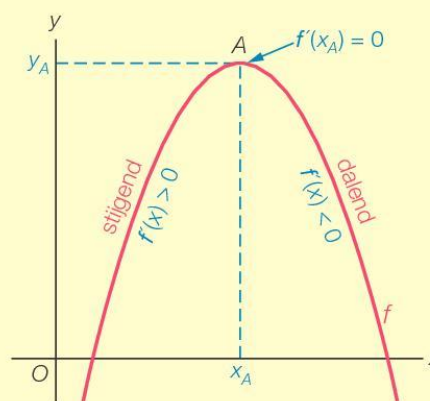
De afgeleide f' van een functie verschaft veel informatie over de grafiek van de functie.

- Is $f'(x) > 0$ op een interval, dan is f stijgend op dat interval.
- Is $f'(x) < 0$ op een interval, dan is f dalend op dat interval.

In de grafiek hiernaast is A een top, dus $f'(x_A) = 0$.

Het maximum van f is y_A .

Maxima en minima heten **extreme waarden**.



figuur 8.59

Werkschema: een extreme waarde van y berekenen met de afgeleide

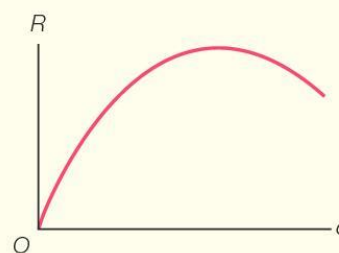
- 1 Bereken de afgeleide $\frac{dy}{dx}$.
- 2 Los de vergelijking $\frac{dy}{dx} = 0$ op.
- 3 Kijk in de grafiek van y of je met een maximum of een minimum te maken hebt.
- 4 Bereken de extreme waarde door de gevonden x -waarde in de formule van y in te vullen.

Bij de meeste opgaven is de grafiek gegeven. Je kunt hierin zien of je met een maximum of een minimum te maken hebt. Is de grafiek niet gegeven, maak dan zelf een schets in je uitwerking. Gebruik bij het maken van de schets de GR.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $R = -0,3q^{1,8} + 25q^{0,9}$. Hierin is R de opbrengst in euro's bij een productie van q stuks met $0 < q < 100$. Zie de grafiek hiernaast.

Bereken met de afgeleide bij welke productie de opbrengst maximaal is. Hoeveel is deze opbrengst? Geef het antwoord in gehele euro's.



figuur 8.60

Uitwerking

$$R = -0,3q^{1,8} + 25q^{0,9} \text{ geeft } \frac{dR}{dq} = -0,54q^{0,8} + 22,5q^{-0,1}$$

$$\frac{dR}{dq} = 0 \text{ geeft } -0,54q^{0,8} + 22,5q^{-0,1} = 0$$

$$\text{Voer in } y_1 = -0,54x^{0,8} + 22,5x^{-0,1}.$$

De optie nulpunt geeft $x = 63,06\dots$

De opbrengst is maximaal bij een productie van 63 stuks.

$q = 63$ geeft $R = 520,83\dots$, dus de maximale opbrengst is 521 euro.

Je ziet dat bij de opdracht 'Bereken met de afgeleide ...' het vereist is dat je de formule van de afgeleide opschrijft. Vervolgens mag je de GR gebruiken voor de verdere berekening. In het voorbeeld hierboven is de vergelijking 'afgeleide = 0' met de optie nulpunt van de GR opgelost.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde moet met de afgeleide worden aangetoond dat W maximaal is voor $q = 16$. Gebruik hierbij het volgende werkschema.

Werkschema: met de afgeleide aantonen dat y een maximum (of minimum) heeft voor $x = a$.

- 1 Bereken $\frac{dy}{dx}$ en laat zien dat $\frac{dy}{dx} = 0$ voor $x = a$.
- 2 Maak een schets van de grafiek van y en laat zien dat er voor $x = a$ een maximum (of minimum) is.

Als de grafiek is gegeven, dan kun je volstaan met een verwijzing naar deze grafiek.

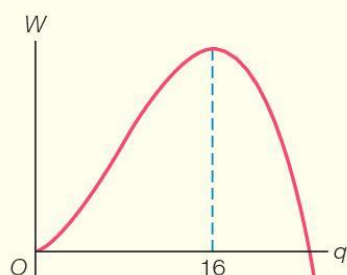
Voorbeeld

De maandelijkse winst van een bedrijf is gegeven door $W(q) = 4q^2 - \frac{1}{6}q^3$. Hierin is W in honderden euro's en q de maandproductie in honderdtallen. Toon met de afgeleide aan dat W maximaal is voor $q = 16$.

Uitwerking

$$W(q) = 4q^2 - \frac{1}{6}q^3 \text{ geeft } W'(q) = 8q - \frac{1}{2}q^2$$

$$W'(16) = 8 \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 16^2 = 128 - 128 = 0$$



Uit de schets volgt dat W maximaal is voor $q = 16$.

73



- a** Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde. Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee de opbrengst toeneemt bij een productie van 50 stuks. Vermeld hierbij de eenheid en rond af op centen.

Zie het voorbeeld hierboven.

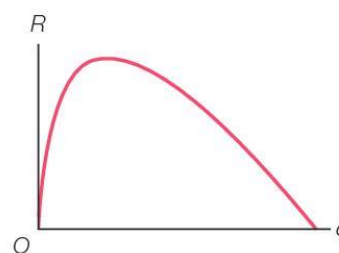
- b** Bereken de maximale winst per maand. Rond af op gehele euro's.
c Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee de winst afneemt bij een productie van 2000 stuks per maand.

74



De opbrengst R van een bedrijf in duizenden euro's wordt gegeven door de formule $R = 4q^{0,41} - q^{0,83}$. Hierbij is q de productie in duizendtallen.

- a** Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee R toeneemt voor $q = 0,5$. Vergeet niet de eenheid te vermelden.
b Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee R afneemt bij een productie van 8500 stuks.
c Bereken met de afgeleide de maximale opbrengst.

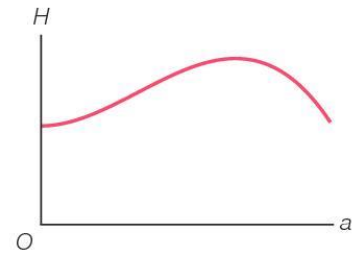


figuur 8.61

75

Lennert houdt tijdens wandelingen met GPS bij waar en op welke hoogte hij zich bevindt. Tijdens een wandeling wordt de hoogte gegeven door $H = -0,4a^3 + 4,8a^2 + 150$ met $0 \leq a \leq 12$. Hierin is H de hoogte in meters boven zeeniveau en a de gelopen afstand in kilometers.

- Zou deze wandeling een rondwandeling kunnen zijn? Licht toe.
- Bereken met de afgeleide de maximale hoogte die Lennert tijdens de wandeling bereikt.

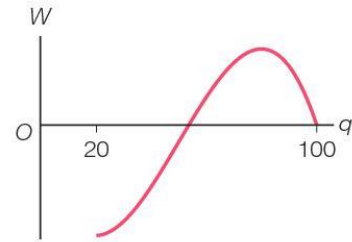


figuur 8.62

76

De maandelijkse winst van een bedrijf is gegeven door $W(q) = -0,01q^3 + 1,5q^2 - 48q - 200$. Hierin is W in duizenden euro's en q de productie in duizendtallen per maand met $20 \leq q \leq 100$.

- Toon met de afgeleide aan dat de winst maximaal is bij een maandelijkse productie van 80 000 stuks.
- Bereken de maximale winst per maand.

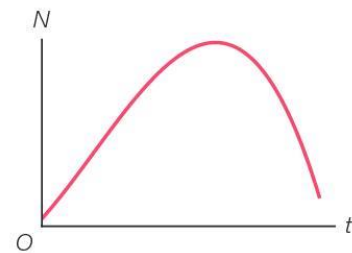


figuur 8.63

A77

Het aantal bacteriën in een afgesloten ruimte is gegeven door $N(t) = -2t^3 + 9t^2 + 60t + 12$. Hierin is N in miljoenen en t de tijd in weken met $0 \leq t \leq 8$.

- Met hoeveel procent neemt het aantal bacteriën in de derde week toe?
- Toon met de afgeleide aan dat het aantal bacteriën op $t = 3$ toeneemt.
- Toon met de afgeleide aan dat het aantal bacteriën op $t = 7$ afneemt.
- Bereken met de afgeleide het maximale aantal bacteriën.



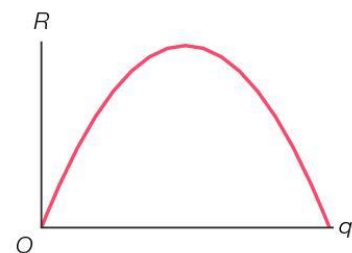
figuur 8.64

078

Gegeven is de formule $R(q) = aq^2 + 40q$. Hierin is R de opbrengst in euro's bij een productie van q stuks. Zie de grafiek hiernaast.

Uit $R'(q) = 0$ volgt $q = -\frac{20}{a}$.

- Toon dit aan.
- Neem $a = -0,25$ en bereken bij welke productie de opbrengst maximaal is.



figuur 8.65

Theorie B Formules met een parameter

In de formule $R(q) = aq^2 + 40q$ is de constante a een parameter oftewel een hulpvariabele. In opgave 78 heb je aangetoond dat R maximaal is

voor $q = -\frac{20}{a}$.

$q = -\frac{20}{a}$ invullen in de formule van R geeft

$$R\left(-\frac{20}{a}\right) = a \cdot \left(-\frac{20}{a}\right)^2 + 40 \cdot -\frac{20}{a} = a \cdot \frac{400}{a^2} - \frac{800}{a} = \frac{400}{a} - \frac{800}{a} = -\frac{400}{a}.$$

De maximale opbrengst uitgedrukt in a is $R_{\max} = -\frac{400}{a}$.

Hoewel de grafiek van R voor elke waarde van a anders is, mag je ervan uitgaan dat de gegeven schets te gebruiken is voor elke waarde van a .

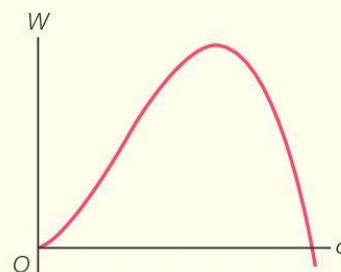
Voorbeeld

De maandelijkse winst van een bedrijf is gegeven door de formule $W = aq^2 - \frac{1}{6}q^3$ met $a > 0$.

Hierin is W in honderden euro's en q de maandproductie in honderdtallen. De constante a is afhankelijk van het economisch perspectief en kan per maand verschillen.

a Toon met de afgeleide aan dat W maximaal is voor $q = 4a$.

b Toon aan dat $W_{\max} = 5\frac{1}{3}a^3$.



figuur 8.66

Uitwerking

a $W = aq^2 - \frac{1}{6}q^3$ geeft $\frac{dW}{dq} = 2aq - \frac{1}{2}q^2$

$$\text{Voor } q = 4a \text{ is } \frac{dW}{dq} = 2a \cdot 4a - \frac{1}{2}(4a)^2 = 8a^2 - \frac{1}{2} \cdot 16a^2 = 8a^2 - 8a^2 = 0.$$

Uit de schets volgt dat je bij $q = 4a$ met een maximum te maken hebt.

b $W_{\max} = a \cdot (4a)^2 - \frac{1}{6} \cdot (4a)^3 = a \cdot 16a^2 - \frac{1}{6} \cdot 64a^3$ **Vul $q = 4a$ in de formule van W in.**
 $= 16a^3 - \frac{64}{6}a^3 = 16a^3 - 10\frac{2}{3}a^3 = 5\frac{1}{3}a^3$

79

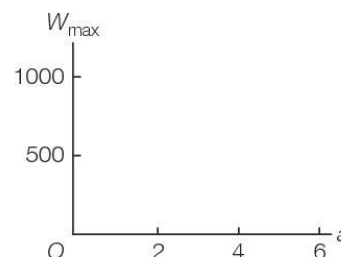


Zie voorbeeld b.

De maximale winst hangt af van a .

a Neem de figuur hiernaast over en schets de grafiek van $W_{\max}$.

b Vanaf welke waarde van a is $W_{\max}$ meer dan 100 000 euro? Rond af op twee decimalen.



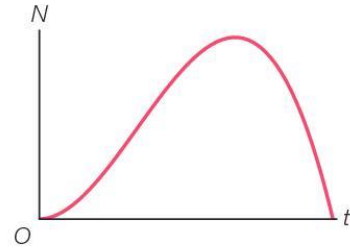
figuur 8.67

80



Het aantal bezoekers N dat zich in een dierentuin bevindt, is te benaderen door het model $N = 25pt^2 - 50t^3$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 9:00 uur en p een constante tussen 16 en 24 die, afhankelijk van het seizoen en het weer, per dag kan verschillen.

- Toon aan dat binnen het model de laatste bezoeker de dierentuin op $t = \frac{1}{2}p$ verlaat.
- Bereken met de afgeleide het maximale aantal bezoekers in de dierentuin in het geval $p = 20$.
- Toon met de afgeleide aan dat het aantal bezoekers maximaal is op $t = \frac{1}{3}p$.



figuur 8.68

Het maximale aantal bezoekers hangt af van p . Er geldt $N_{\max} = \frac{25}{27}p^3$.

- Toon aan dat de formule voor $N_{\max}$ juist is.
- Schets de grafiek van $N_{\max}$.
- Bereken voor welke waarden van p het maximale aantal bezoekers tussen 6000 en 10000 ligt. Rond af op één decimaal.



81



De totale bladoppervlakte B van een plant hangt af van de ouderdom van de plant. Een plantenkweker heeft ontdekt dat voor bepaalde plantensoorten de formule $B = a\sqrt{t} - t$ geldt. Hierin is B de oppervlakte in dm^2 , t de tijd in maanden en a een constante die afhangt van de plantensoort.

Bekijk een plantensoort waarvoor geldt $a = 4$.

- Bereken met de afgeleide met welke snelheid in cm^2 per maand de totale bladoppervlakte toeneemt op $t = 3$.
- Toon met de afgeleide aan dat de bladoppervlakte maximaal is op $t = 4$. Hoe groot is die maximale bladoppervlakte?

Volgens de plantenkweker is voor elk van de onderzochte plantensoorten de bladoppervlakte maximaal als $t = \frac{1}{4}a^2$.

- Toon de juistheid van deze bewering aan en druk $B_{\max}$ uit in a .

A82
□ ⊗ *

Het effect van een medicijn om de bloeddruk te verlagen wordt gegeven door de formule $V = 0,0015d^2(\frac{1}{3}M - \frac{1}{2}d)$. Hierin is V de verlaging van de bloeddruk in mmHg bij een gebruik van d mg medicijn per dag en M de maximaal toegestane hoeveelheid medicijn in mg per dag. Bij een hogere dosering dan de maximaal toegestane hoeveelheid van M mg per dag treden bijwerkingen op.



- a** Een patiënt met een te hoge bloeddruk krijgt het medicijn toegediend. Volgens de arts is de maximaal toegestane dosering 90 mg per dag. Bereken bij welke dosering de bloeddruk het meest zal dalen. Hoeveel is de maximale verlaging?

De maximaal toegestane hoeveelheid medicijn verschilt per patiënt. De bloeddruk zal het meest dalen als de dosering gelijk is aan $\frac{4}{9}$ deel van de maximaal toegestane hoeveelheid.

- b** Toon dit aan.
c Toon aan dat de maximale bloeddrukverlaging te schrijven is als $V_{\max} = aM^3$ en bereken a . Rond af op zes decimalen.

A83
*

De beheerder van een internetsite gebruikt het model $N = -4t^3 + at^2 - 10at + 6000$ om het aantal bezoekers op woensdagen mee te beschrijven. In dit model is N het aantal bezoekers en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0:00 uur. Op een woensdag is het aantal bezoekers maximaal om 9 uur 's avonds. Bereken het maximale aantal bezoekers op deze dag. Rond af op tientallen.

Terugblik

Met de afgeleide berekenen van extreme waarden

Bij de opdracht *Bereken met de afgeleide het maximum van y* bereken je

de afgeleide $\frac{dy}{dx}$ en los je de vergelijking $\frac{dy}{dx} = 0$ op. Deze vergelijking

mag je oplossen met de GR. Soms is het echter gemakkelijker om deze vergelijking stap voor stap op te lossen.

Nadat je de vergelijking hebt opgelost, kijk je in de grafiek of je bij een gevonden oplossing met een maximum te maken hebt. Vaak is de grafiek gegeven. Als dit niet het geval is, dan maak je zelf een schets in je uitwerking.

Ten slotte bereken je het maximum door de gevonden x -waarde in de formule van y in te vullen.

Bij de formule $N = 6t^2 - \frac{1}{12}t^3$ krijg je $\frac{dN}{dt} = 12t - \frac{1}{4}t^2$.

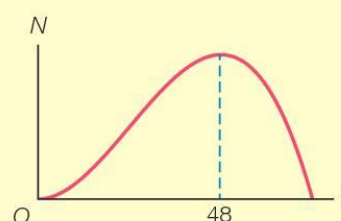
$\frac{dN}{dt} = 0$ geeft $12t - \frac{1}{4}t^2 = 0$, dus $t(12 - \frac{1}{4}t) = 0$ en dit geeft

$t = 0$ of $t = 48$.

Je mag de vergelijking $12t - \frac{1}{4}t^2 = 0$ ook met de GR oplossen.

Uit de schets volgt dat N maximaal is voor $t = 48$.

$$N_{\max} = 6 \cdot 48^2 - \frac{1}{12} \cdot 48^3 = 4608$$



Controleren van maxima en minima

Bij de opdracht *Toon met de afgeleide aan dat y maximaal is voor $x = a$* bereken je eerst de afgeleide en laat je zien dat deze 0 is voor $x = a$ door $x = a$ in de afgeleide in te vullen. Daarna kijk je in de grafiek van y en merk je op dat er inderdaad een hoogste punt is bij $x = a$.

Bij het aantonen dat N maximaal is voor $t = 8a$ bij de formule

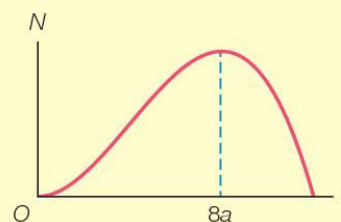
$$N = at^2 - \frac{1}{12}t^3 \text{ krijg je } \frac{dN}{dt} = 2at - \frac{1}{4}t^2.$$

Invullen van $t = 8a$ in de afgeleide geeft

$$\frac{dN}{dt} = 2a \cdot 8a - \frac{1}{4}(8a)^2 = 16a^2 - \frac{1}{4} \cdot 64a^2 = 16a^2 - 16a^2 = 0.$$

Uit de schets volgt dat N maximaal is voor $t = 8a$.

$$N_{\max} = a \cdot (8a)^2 - \frac{1}{12} \cdot (8a)^3 = 64a^3 - 42\frac{2}{3}a^3 = 21\frac{1}{2}a^3$$



Eindopdracht Maximale opbrengst bij toltarief

Het aantal personenauto's dat gebruikmaakt van een tolbrug hangt af van het toltarief.

Het aantal auto's kan worden berekend met de formule

$N = \frac{1}{3}aT^3 - 15aT^2 + 5000$. Hierin is N het aantal personenauto's dat per dag gebruikmaakt van de brug en T het toltarief in euro's. In deze formule is T maximaal 30. De positieve constante a hangt af van de economische omstandigheden.

De dagelijkse opbrengst in euro's kan worden berekend met de formule $R = \frac{1}{3}aT^4 - 15aT^3 + 5000T$.

Rond in deze opdracht de waarde van a af op twee decimalen, het toltarief op gehele centen en de opbrengst op gehele euro's.

- Er is een waarde van a waarbij de opbrengst maximaal is bij een toltarief van 15 euro.
Bereken deze waarde van a en de bijbehorende maximale opbrengst per dag. Hoeveel auto's rijden er dan dagelijks over de brug?
- Er is een waarde van a waarbij de opbrengst maximaal is bij een toltarief van 12 euro. Bij deze waarde van a wordt de opbrengst echter negatief vanaf een bepaalde hogere waarde van het toltarief.
Bereken dit toltarief.
- Er is een waarde van a waarbij de maximale opbrengst gelijk is aan 50 000 euro.
Zoek uit wat deze waarde van a is. Welk toltarief hoort hierbij en hoeveel auto's rijden er dan dagelijks over de brug?

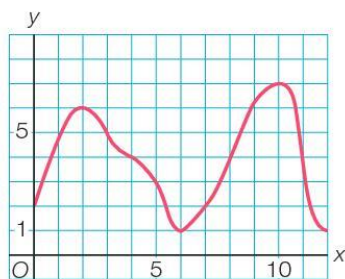


Diagnostische toets

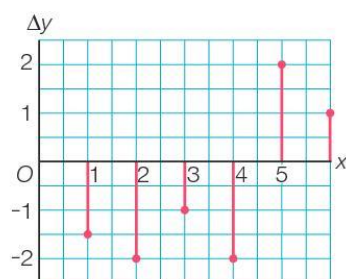
8.1 Toenamediagrammen en differentiequotiënten

1 Zie figuur 8.69.

- a Teken bij de grafiek in figuur 8.69 het toenamediagram met stapgrootte $\Delta x = 2$.
- b Bereken de gemiddelde verandering van y op het interval $[0, 4]$.
- c Bereken het differentiequotiënt van y op het interval $[2, 12]$.



figuur 8.69



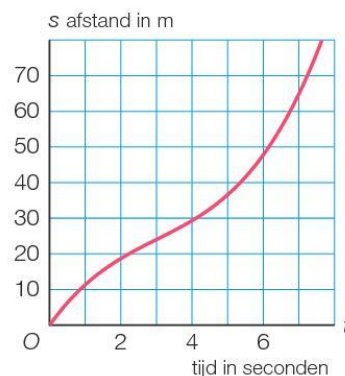
figuur 8.70

2 Teken een mogelijke grafiek die door het punt $(3, 5)$ gaat en die hoort bij het toenamediagram in figuur 8.70.

8.2 Hellinggrafieken

3 **[WERKBLAD]** In figuur 8.71 zie je een tijd-afstandgrafiek.

- a Schat de snelheid op $t = 1$ en op $t = 6$.
- b Voor welke t schat je dat de snelheid minimaal is? Hoe groot is deze minimale snelheid?
- c Hoeveel tijdstippen zijn er tussen $t = 0$ en $t = 6$ waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[0, 6]$? Licht toe.



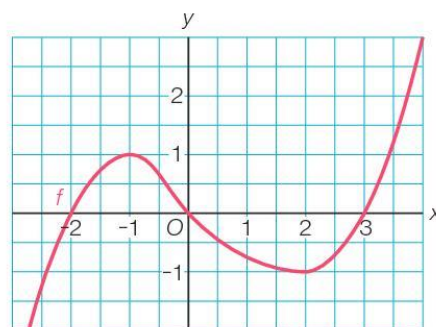
figuur 8.71

4 De temperatuur op een dag in juni kan benaderd worden door de formule $T = -0,014t^3 + 0,44t^2 - 2,6t + 11$. Hierin is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en t het tijdstip in uren met $t = 0$ om 0:00 uur.

- a Bereken de snelheid waarmee de temperatuur verandert om 9:30 uur.
- b Toon aan dat de temperatuur 's middags om half vier toeneemt.
- c Toon aan dat de temperatuur 's avonds om kwart voor zeven afneemt.

5 **[WERKBLAD]** Zie de grafiek in figuur 8.72.

- a Schets de hellinggrafiek van f .
- b Neem aan dat de grafiek van f de hellinggrafiek is van de functie g . Schets een mogelijke grafiek van g .



figuur 8.72

8.3 Differentiëren

6 Differentieer.

a $f(x) = 0,6x^3 - 1,3x^2 + 9$

b $N(t) = (3 - t)(5 + 2t)$

c $K(p) = p^3 - p(p - 3)^2$

8.4 Notaties en regels voor de afgeleide

7 Gegeven is de formule $K = 20q^2 - 5pq + 8p^3$.

Bereken $\frac{dK}{dp}$ en $\frac{dK}{dq}$.

8 Bereken de afgeleide.

a $y = \frac{1}{5x^6} + 5x^6 \cdot \sqrt{x}$

b $y = (5 + x)\sqrt{x}$

c $y = \sqrt[6]{x^5} + \frac{5}{x} + \frac{x}{6}$

9 Differentieer.

a $y = 6(3x - 1)^4 + 7x$

b $R = 20\sqrt{5q^3 + 4q}$

c $A = \frac{4}{2 - 3q^4}$

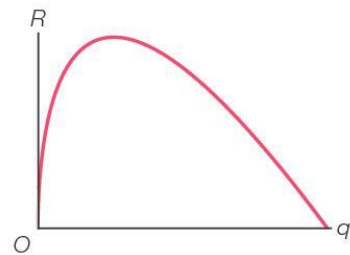
8.5 Extreme waarden en de afgeleide

10 De opbrengst R van een bedrijf in duizenden euro's wordt gegeven door de formule $R = 5q^{0,6} - 2q^{0,92}$. Hierbij is q de productie in duizendtallen.

a Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee R afneemt voor $q = 6$.

b Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee R toeneemt voor $q = 3$.

c Bereken met de afgeleide de maximale opbrengst.



figuur 8.73

11 Onderzoek heeft uitgewezen dat het effect van een tv-commercial op den duur afneemt. Hierbij wordt het begrip effectiviteit E gebruikt. Een marketingbureau gaat uit van de formule $E(n) = 0,48n - an^2$, waarin n het aantal keer is dat de commercial wordt uitgezonden en a een constante is met $0 < a < 0,2$.

Toon met de afgeleide aan dat de effectiviteit maximaal is voor $n = \frac{6}{25a}$ en dat $E_{\max} = \frac{1,44}{25a}$.