

8 Differentiaalrekening

Voorkennis Intervallen, stijgen en dalen

Bladzijde 10

- 1** a toenemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$ en op $\langle 8, 10 \rangle$
afnemend stijgend op $\langle 4, 5 \rangle$ en op $\langle 10, 12 \rangle$
b afnemend dalend op $\langle 0, 2 \rangle$ en op $\langle 7, 8 \rangle$
toenemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$
- 2** a constant stijgend op $\langle 0, 3 \rangle$
afnemend stijgend op $\langle 3, 4 \rangle$
toenemend dalend op $\langle 4, 5 \rangle$
afnemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$
toenemend stijgend op $\langle 7, 10 \rangle$
b Bij het klimmen neemt de snelheid van de fietser af. Dus op het interval $\langle 4, 7 \rangle$.

8.1 Toenamedigrammen en differentiequotiënten

Bladzijde 11

- 1** a Tussen tien uur en twaalf uur, dus tussen $t = 2$ en $t = 4$.
De toename is $10 - 4 = 6^\circ\text{C}$.
b De toename van T op $[4, 6]$ is $15 - 10 = 5^\circ\text{C}$.
c Deze afname is $15,5 - 12 = 3,5^\circ\text{C}$.

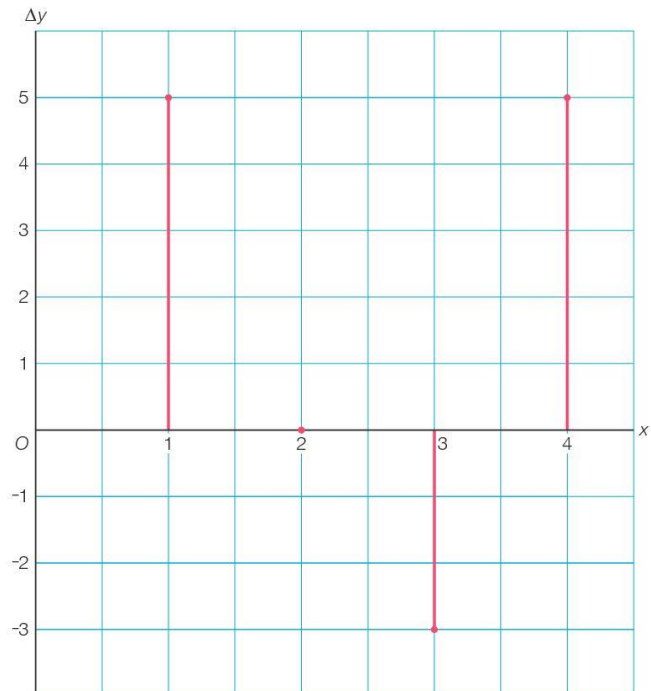
d

interval	$[0, 2]$	$[2, 4]$	$[4, 6]$	$[6, 8]$	$[8, 10]$	$[10, 12]$
ΔT	2	6	5	0,5	-3,5	-4

Bladzijde 12

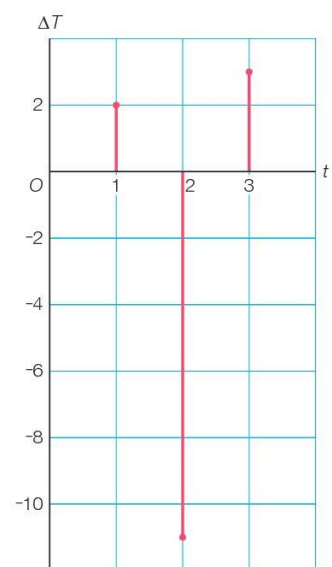
2

interval	Δy
$[0, 1]$	5
$[1, 2]$	0
$[2, 3]$	-3
$[3, 4]$	5



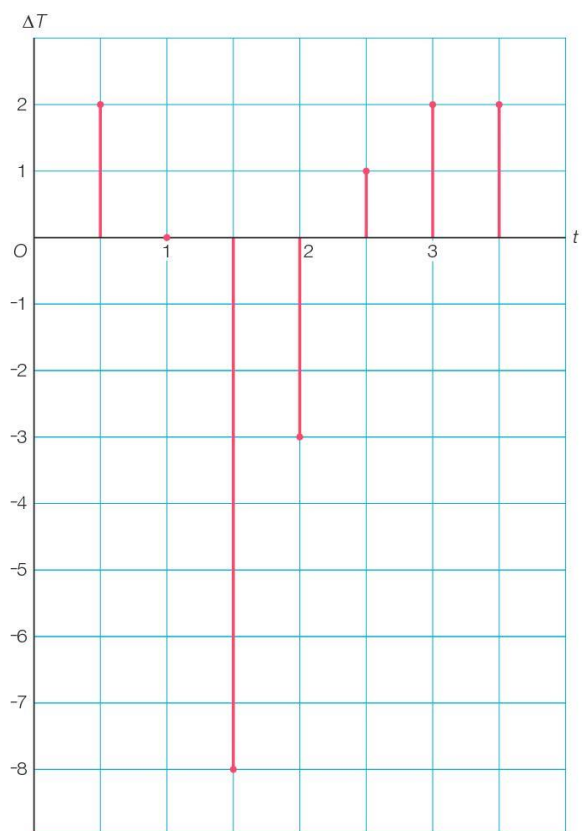
3 a

interval	ΔT
$[0, 1]$	2
$[1, 2]$	-11
$[2, 3]$	3

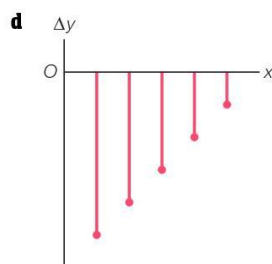
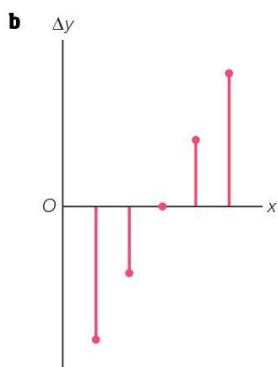
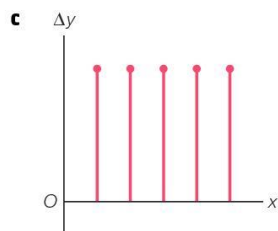
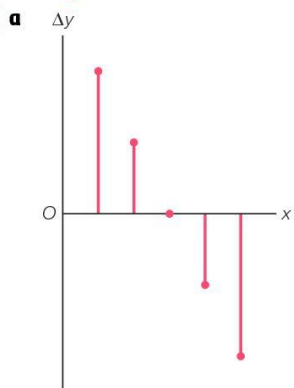


b

interval	ΔT
$[0; 0,5]$	2
$[0,5; 1]$	0
$[1; 1,5]$	-8
$[1,5; 2]$	-3
$[2; 2,5]$	1
$[2,5; 3]$	2
$[3; 3,5]$	2



4



5

Bij A hoort III, want tussen 0 en 2 afnemend stijgend en daarna eerst toenemend dalend en daarna afnemend dalend.

Bij B hoort I, want tussen 0 en 2 afnemend dalend en daarna eerst toenemend stijgend en daarna afnemend stijgend.

Bij C hoort II, want tussen 0 en 3 constant stijgend, dan dalend en daarna weer stijgend.

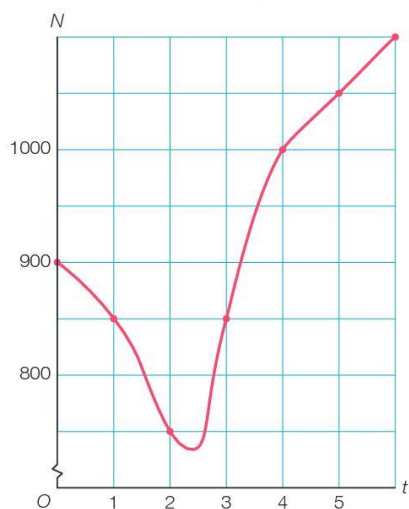
6

a Tussen 12 uur en 14 uur is $\Delta T = 4$, dus 's middags om twee uur is de temperatuur $20 + 4 = 24^\circ\text{C}$.

b Om vier uur 's middags is de temperatuur $24 - 1 = 23^\circ\text{C}$.
Om acht uur 's avonds is de temperatuur $23 - 5 - 2 = 16^\circ\text{C}$.

c Tussen 8 uur en 10 uur is $\Delta T = 3$ en tussen 10 uur en 12 uur is $\Delta T = 5$, dus om acht uur 's morgens is de temperatuur $20 - 5 - 3 = 12^\circ\text{C}$.

7 Ja, dat kan. Je hebt dan bijvoorbeeld de volgende grafiek.



8 a, b

x	y
0	1,5
1	2
2	3
3	3,5
4	4,5
5	5
6	4,5

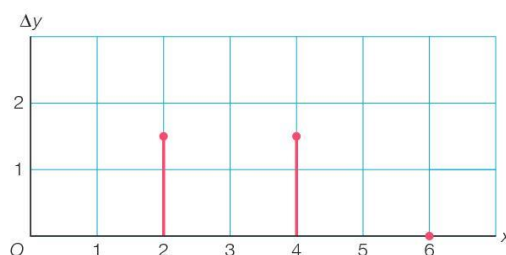
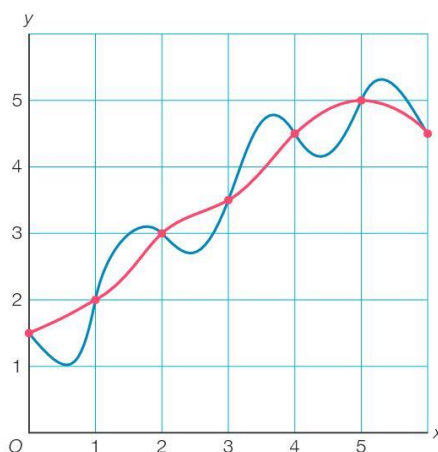
+0,5
+1
+0,5
+1
+0,5
-0,5

b Alleen de punten $(0; 1,5)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, ... liggen vast.

Elke grafiek door deze punten is mogelijk.

c

interval	Δy
$[0, 2]$	1,5
$[2, 4]$	1,5
$[4, 6]$	0



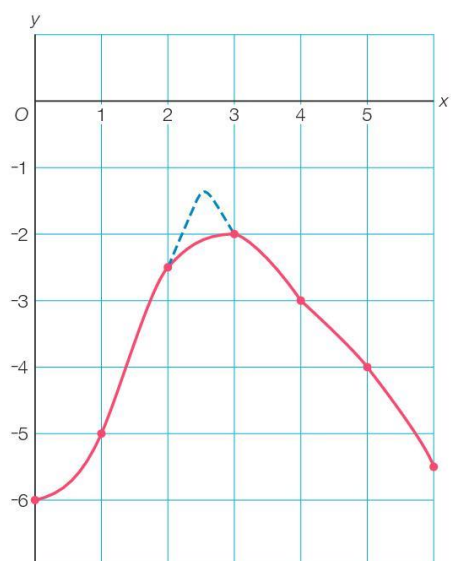
9

a

x	y
0	-6
1	-5
2	-2,5
3	-2
4	-3
5	-4
6	-5,5

+1
+2,5
+0,5
-1
-1
-1,5

- b Dit maximum kan optreden bij $x = 2,5$. Zie het gestippelde stuk in de grafiek van vraag a. Het maximum kan niet optreden bij $x = 1,5$, want er is al een maximum tussen $x = 2$ en $x = 4$ en er is gegeven dat er maar één maximum is.

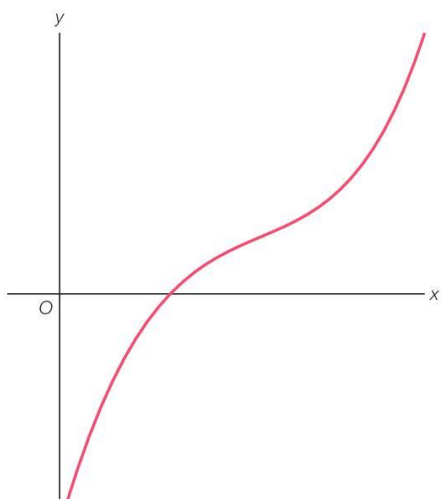


10

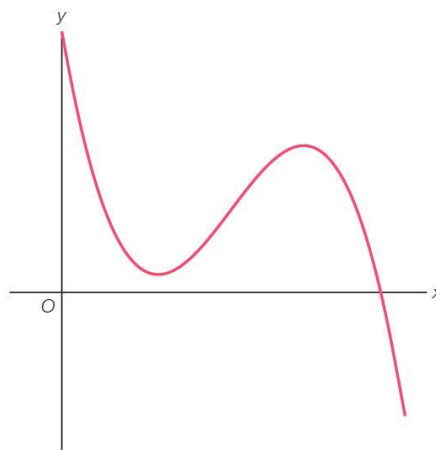
- I constant dalend
II afnemend stijgend
III afnemend dalend
IV toenemend dalend

11

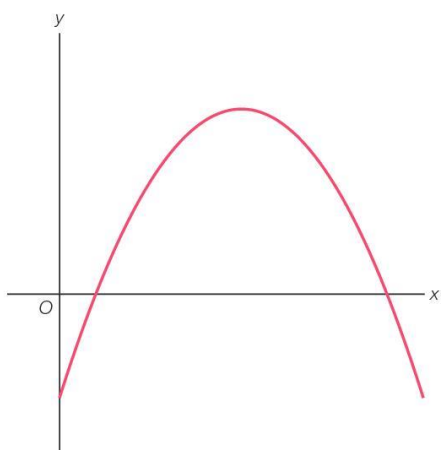
a



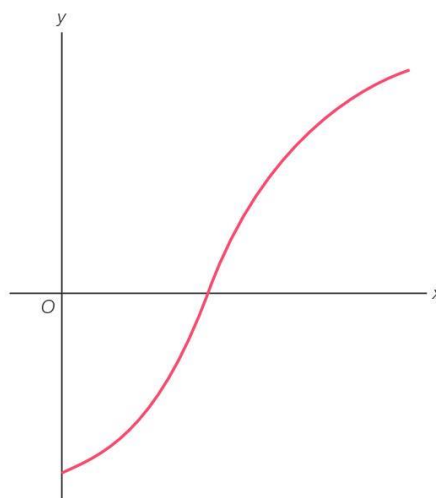
c



b



d



Bladzijde 16

- 12 a** Om 17:00 uur stonden er $110 - 10 - 35 = 65$ fietsen.
Om 9:00 uur stonden er $110 - 25 - 15 + 15 - 40 + 40 + 20 = 105$ fietsen.
b Tussen 10 en 11 uur is er netto een afname van 40.
Als 30 personen een fiets hebben neergezet, zijn er dus 70 fietsen meegenomen.

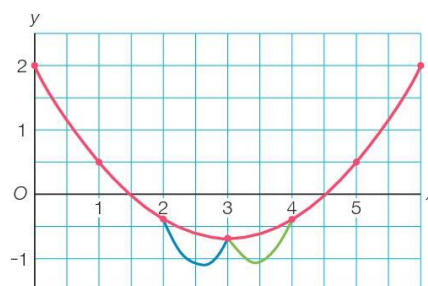
- 13** Stel er zitten om 15:00 uur x mensen op het terras. Je krijg dan de volgende tabel.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
N	x	$x - 20$	$x - 10$	$x - 40$	$x - 30$	x	$x - 35$	$x - 45$
		-20	+10	-30	+10	+30	-35	-10

Omdat op alle tijdstippen moet gelden dat N minstens 0 is, moet x tenminste 45 zijn.
Er zaten dus om 15:00 uur minstens 45 mensen op het terras.

14

x	y
0	2
1	0,5
2	-0,4
3	-0,7
4	-0,4
5	0,5
6	2



In de getekende grafiek treedt het minimum op bij $x = 3$.
Verder zijn twee mogelijke grafieken getekend: één met het minimum op $\langle 2, 3 \rangle$ en één met het minimum op $\langle 3, 4 \rangle$.
Het minimum kan optreden op $\langle 2, 4 \rangle$.

Bladzijde 17

- 15** Stijn vergeet rekening te houden met de lengten van de perioden.

Bladzijde 18

- 16 a** In de periode 1980-1987 neemt N met $5,59 - 4,85 = 0,74$ toe.
Hier is $\Delta t = 1987 - 1980 = 7$ en $\Delta N = 0,74$.
De gemiddelde toename is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{0,74}{7} \approx 0,106$ miljoen per jaar.

b

periode	Δt	ΔN	$\frac{\Delta N}{\Delta t}$
1920-1947	27	0,75	0,028
1947-1964	17	1,03	0,061
1964-1970	6	0,60	0,100
1970-1980	10	1,10	0,110
1980-1987	7	0,74	0,106
1987-1995	8	0,71	0,089
1995-2000	5	0,29	0,058
2000-2019	19	1,23	0,065

- c** De gemiddelde toename is het grootst in de periode 1970-1980.
d De woningvoorraad nam steeds toe, maar de sterkste toename was in de periode tussen 1964 en 1987.

17 a Op $[0, 10]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{2250 - 250}{10 - 0} = \frac{2000}{10} = 200$.

De gemiddelde toename gedurende de eerste 10 dagen is 200 vliegjes per dag.

b Op $[2, 8]$ is de grafiek steiler dan op $[10, 14]$.

c Het grootst op $[4, 8]$, het kleinst op $[0, 4]$.

Bladzijde 19

18 a Op $[9, 13]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 800}{13 - 9} = 200$.

b Op $[12, 17]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 2000}{17 - 12} = -80$.

c Op $[9, 17]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 800}{17 - 9} = \frac{800}{8} = 100$, dus $[9, 17]$.

d Op $[15, 18]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1200 - 1800}{18 - 15} = \frac{-600}{3} = -200$, dus $[15, 18]$.

19 a Op $[1, 6]$ is de gemiddelde toename $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 3}{6 - 1} = \frac{3}{5} = 0,6$.

b De richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 3}{6 - 1} = \frac{3}{5} = 0,6$.

c De antwoorden en ook de berekeningen zijn hetzelfde.

Bladzijde 20

20 a De gemiddelde verandering op $[2, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 5}{5 - 2} = \frac{1}{3}$.

b Op $[-1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 2}{5 - (-1)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

c Bijvoorbeeld $[2, 6]$.

21 a Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$.

b Op $[4, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 6}{6 - 4} = \frac{-3}{2} = -1,5$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, dus er is een afname.

c Op $[2, 7]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 3}{7 - 2} = \frac{-1}{5} = -0,2$.

d Bijvoorbeeld $[2, 6]$ of $[3, 5]$.

e Bijvoorbeeld $[0, 2]$ of $[2, 4]$.

22 a Op elk interval is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5$.

b Bij een lijn zijn alle differentiequotienten gelijk.

Bladzijde 21

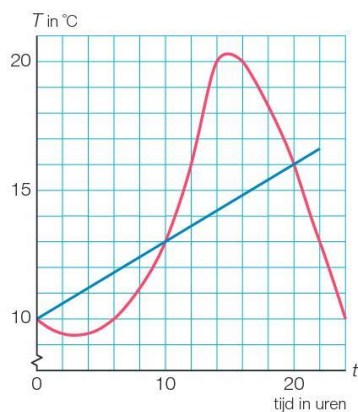
23 a Op $[6, 10]$ is $\Delta T = 13 - 10 = 3$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{3}{4} = 0,75^\circ\text{C}$ per uur.

Op $[9, 14]$ is $\Delta T = 20 - 12 = 8$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{8}{5} = 1,6^\circ\text{C}$ per uur.

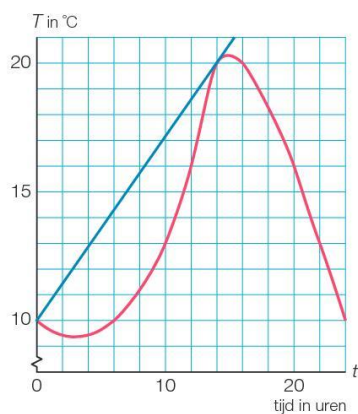
b Bijvoorbeeld op $[12, 22]$ is $\Delta T = 13 - 16 = -3$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{-3}{10} = -0,3$.

Dus op het interval $[12, 22]$ is de gemiddelde verandering $-0,3^\circ\text{C}$ per uur.

- c Teken de lijn door $(0, 10)$ en $(10, 13)$. Deze lijn snijdt de grafiek ook in het punt $(20, 16)$.
Dus voor $t = 20$.



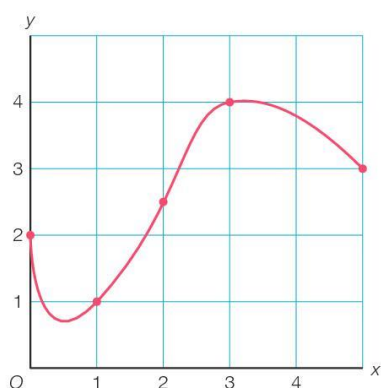
- d De gemiddelde toename is maximaal als de lijn het steilst is. Teken dus een lijn die zo steil mogelijk is door $(0, 10)$ en een ander punt van de grafiek. Dat is de lijn door $(14, 20)$.
Dus voor $t = 14$.



24 Op $[0, 7]$ is $\Delta y = 30 + 20 - 10 + 10 - 20 + 20 + 20 = 70$, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{70}{7} = 10$.

Op $[2, 6]$ is $\Delta y = -10 + 10 - 20 + 20 = 0$, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

- 25 a** Teken de volgende punten. Begin met $(0, 2)$.
 Op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$, dus door $(2, 2 + 2 \cdot \frac{1}{4}) = (2, 2\frac{1}{2})$.
 Op $[0, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{5}$, dus door $(5, 2 + 5 \cdot \frac{1}{5}) = (5, 3)$.
 Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$, dus door $(1, 3 - 4 \cdot \frac{1}{2}) = (1, 1)$.
 Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\frac{1}{2}$, dus door $(3, 1 + 2 \cdot 1\frac{1}{2}) = (3, 4)$.
 Teken door deze punten een mogelijke grafiek.



Het differentiequotiënt op $[3, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 4}{5 - 3} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

- b** Dat is mogelijk, want bij $x = 4$ is elke y -coördinaat mogelijk, dus ook $y = 5\frac{1}{2}$.
 En op $[1, 4]$ geeft dit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\frac{1}{2} - 1}{4 - 1} = \frac{4\frac{1}{2}}{3} = 1\frac{1}{2}$.

- 26 a** $q = 4$ geeft $K = 35$ en $q = 6$ geeft $K = 93$.
 Op $[4, 6]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{93 - 35}{2} = 29$ euro per stuk.
b $q = 2$ geeft $K = 25$ en $q = 5$ geeft $K = 55$.
 Op $[2, 5]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{55 - 25}{3} = 10$ euro per stuk.
c $q = 3,6$ geeft $K = 30,696$ en $q = 6,1$ geeft $K = 98,021$.
 Op $[3,6; 6,1]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{98,021 - 30,696}{2,5} = 26,93$.
 De gemiddelde toename van de kosten is 26,93 euro per stuk.

8.2 Hellinggrafieken

Bladzijde 23

- 27 a** 10 km in 8 minuten, dus $\frac{10}{\frac{8}{60}} = 75$ km/uur.
b Bij een gemiddelde snelheid van minder dan 80 km/uur kun je op één moment veel harder hebben gereden.

Bladzijde 25

- 28 a** De raaklijn gaat door de punten $(5, 70)$ en $(10, 120)$.
 De richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{120 - 70}{10 - 5} = 10$.
 De snelheid op $t = 8$ is 10 km/uur.

- b** Teken de raaklijn in het punt met $t = 3$. Deze gaat door de punten $(0, 30)$ en $(7, 80)$.

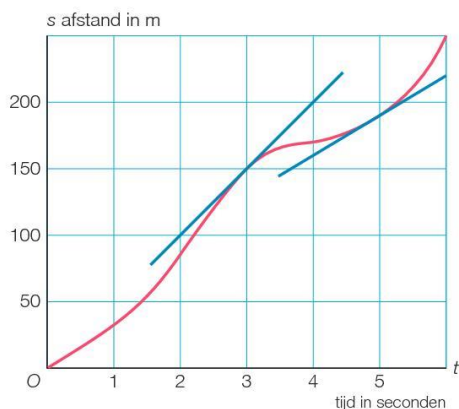
De richtingscoëfficiënt is $\frac{79-29}{7-0} \approx 7,1$. De snelheid op $t = 3$ is 7,1 km/uur.



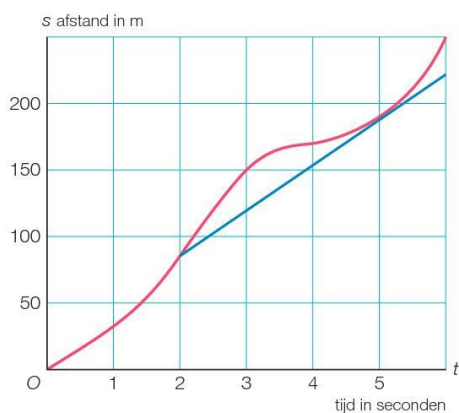
- c** Omdat de grafiek afnemend stijgend is op $[0, 4]$, neemt de snelheid af.
d De helling is het kleinst voor $t = 4$. Dus daar is de snelheid minimaal.

Bladzijde 26

- 29 a** Teken de raaklijn in het punt $(3, 150)$. De helling van deze raaklijn is ongeveer 50. Dus de snelheid op $t = 3$ is ongeveer 50 m/s.
 Teken de raaklijn in het punt $(5, 190)$. De helling van deze raaklijn is ongeveer 30. Dus de snelheid op $t = 5$ is ongeveer 30 m/s.

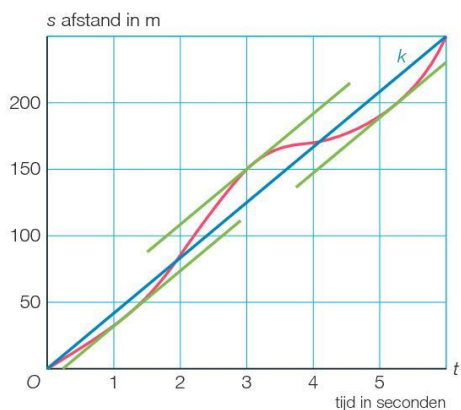


- b** De helling is het kleinst voor $t = 4$. Dus daar is de snelheid minimaal.
c De gemiddelde snelheid is minimaal als de lijn het minst steil is. Teken dus de minst steile lijn door $(2, 85)$ en een ander punt van de grafiek. Dat is de lijn door $(5, 180)$. Dus voor $t = 5$.



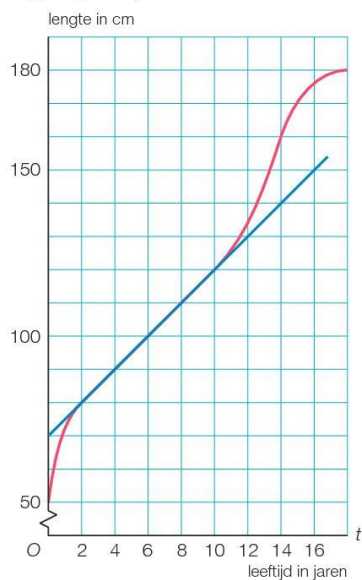
- d** Teken de lijn k door $(0, 0)$ en $(6, 250)$. De grafiek heeft drie raaklijnen die evenwijdig zijn met k .

Dus er zijn drie tijdstippen waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[0, 6]$.



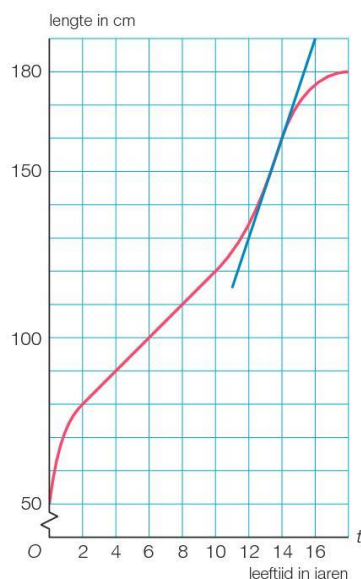
- 30 a** De raaklijn die hoort bij $t = 6$ valt op het interval $[2, 10]$ samen met de grafiek. De raaklijn gaat door de punten $(2, 80)$ en $(10, 120)$. Dus de groeisnelheid is

$$\frac{120 - 80}{10 - 2} = \frac{40}{8} = 5 \text{ cm/jaar.}$$

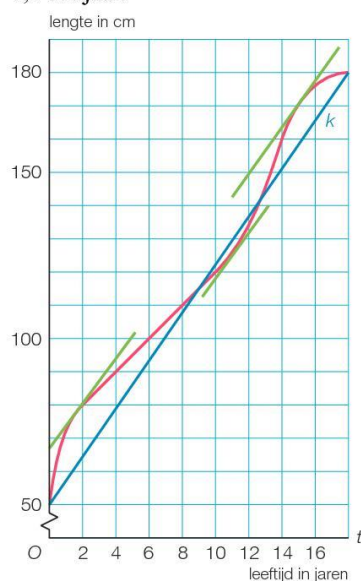


- b** De raaklijn die hoort bij $t=14$ gaat door de punten (12, 130) en (16, 190).

Rond haar veertiende verjaardag is Lottes groeisnelheid $\frac{190 - 130}{16 - 12} = 15$ cm/jaar.

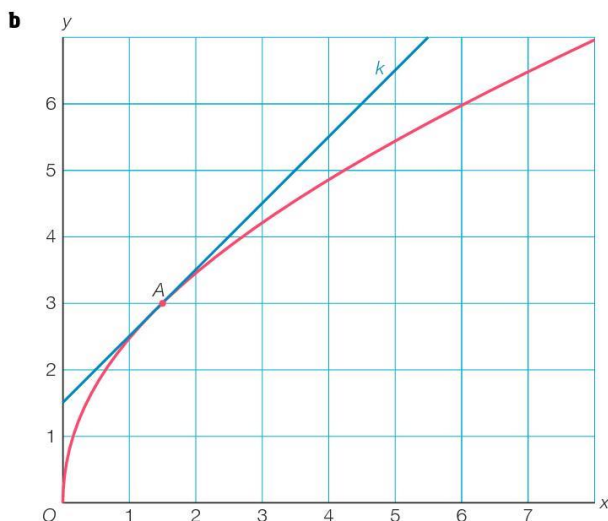


- c** De gemiddelde groeisnelheid van 0 tot 18 jaar is $\frac{180 - 50}{18} \approx 7,2$ cm/jaar.
- d** Teken de lijn k door de punten (0, 50) en (18, 180). Deze lijn hoort bij de gemiddelde groeisnelheid van 0 tot 18 jaar. Verschuif deze lijn evenwijdig. Je vindt drie raaklijnen die evenwijdig met k zijn. Deze raken de grafiek bij $t \approx 1,5$, $t \approx 11$ en $t \approx 15$. Dus bij de leeftijden van 1,5, 11 en 15 jaar is de groeisnelheid van Lotte gelijk aan 7,2 cm/jaar.



31 a $x = 1,5$ geeft $y = \sqrt{6 \cdot 1,5} = \sqrt{9} = 3$ en $x = 1,51$ geeft $y = \sqrt{6 \cdot 1,51} = \sqrt{9,06}$.

Op $[1,5; 1,51]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{9,06} - 3}{0,01} \approx 1,00$.



De raaklijn gaat door de punten $(0; 1,5)$ en $(5,5; 7)$, dus $rc_k = \frac{7 - 1,5}{5,5 - 0} = 1$.

- c** Er geldt $rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ voor $x = 1,5$.

Bladzijde 27

- 32 a** Voer in $y_1 = 0,04x^2 + 0,3x + 20$.
De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=20} = 1,9$.
De gevraagde snelheid is €1,90 per kg.
- b** Bij een productie van 3200 kg hoort $q = 3,2$.
De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3,2} = 0,556$.
De gevraagde snelheid is €0,56 per kg.
- c** Bij een productie van 8160 kg hoort $q = 8,16$.
De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=8,16} = 0,9528$.
De gevraagde snelheid is €0,95 per kg.

Bladzijde 28

- 33 a** Voer in $y_1 = \frac{2000}{1 + 12 \cdot 0,95^x}$.
De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=10} \approx 11,0$.
De gevraagde snelheid is 11 vissen per week.
- b** De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=33} \approx 22,0$.
Op $t = 33$ is de snelheid 22 vissen per week.
Dus Arjen heeft gelijk.
- c** De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=100} \approx 6,35$.
Dus de snelheid op $t = 100$ is kleiner dan de snelheid op $t = 33$ en daarom heeft Tess niet gelijk.
- 34 a** Bij 1 mei om 17:30 uur hoort $t = 5,5$.
Voer in $y_1 = 37 + \frac{45x}{x^2 + 70}$.
De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=5,5} \approx 0,18$.
De gevraagde snelheid is 0,18 °C per uur.

- b** Bij 2 mei om 08:00 uur hoort $t = 20$.
 De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=20} \approx -0,07$.
 De gevraagde snelheid is $0,07^\circ\text{C}$ per uur.
- c** De optie maximum geeft $x = 8,36\dots$ en $y \approx 39,7$.
 De maximale temperatuur is ongeveer $39,7^\circ\text{C}$.
 Bij $t = 8,36\dots$ hoort het tijdstip 1 mei om 20:22 uur.
 Dus de griep is op zijn hoogtepunt op 1 mei om 20:22 uur.
- d** Voer in $y_2 = 39$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 3,73$ en $x \approx 18,77$.
 $18,77 - 3,73 = 15,04$
 Dus de lichaamstemperatuur is iets meer dan 15 uur boven 39°C .

- 35 a** De snelheid waarmee het aantal personen toeneemt dat zich op een zaterdag in het warenhuis bevindt om 13:00 uur is 24 personen per uur.
- b** *
- c** toe af

Bladzijde 29

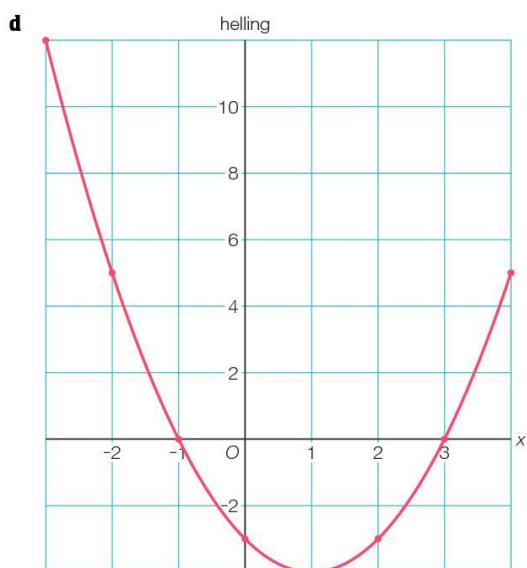
- 36 a** Op 1 juli 2020 was de snelheid waarmee het aantal werknemers afnam 2,4 per jaar.
- b** Bij 1 juli 2015 hoort $t = 5,5$.
 Voer in $y_1 = \frac{1000x - 10x^2}{x + 1}$.
 De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=5} \approx 13,9 > 0$, dus op 1 juli 2015 nam het aantal werknemers toe.
- c** Bij 1 januari 2015 hoort $t = 5$ en bij 1 januari 2016 hoort $t = 6$.
 $t = 5$ geeft $N \approx 792$ en $t = 6$ geeft $N \approx 806$.
 De toename is $806 - 792 = 14$.
- d** De optie maximum geeft $x = 9,04\dots$ en $y = 819,00\dots$.
 Het maximale aantal werknemers is 819.
 Dat was in het jaar 2019.

Bladzijde 30

- 37 a** Voer in $y_1 = -0,2x^3 + 4,5x^2 + 80x + 500$.
 Bij 1 januari 2005 hoort $t = 10$.
 $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=10} = 110 > 0$, dus op 1 januari 2005 nam het aantal rendieren toe.
- b** Bij 1 juli 2020 hoort $t = 25,5$.
 $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=25,5} = -80,65 < 0$, dus op 1 juli 2020 nam N af: het aantal rendieren was over het hoogtepunt heen.
- c** Bij 1 oktober 2023 hoort $t = 28\frac{9}{12} = 28,75$.
 De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=28,75} = -157,1875$.
 De snelheid waarmee het aantal rendieren afneemt is 157 rendieren per jaar.
- d** De snelheid is gelijk aan 0 in de top van de grafiek.
 De optie maximum geeft $x = 21,26\dots$ en $y = 2312,89\dots$.
 Dus de snelheid is gelijk aan 0 voor $t = 21,3$.

- 38 a** positief negatief
- b** In de toppen is de helling nul.
- c** Voer in $y_1 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$.

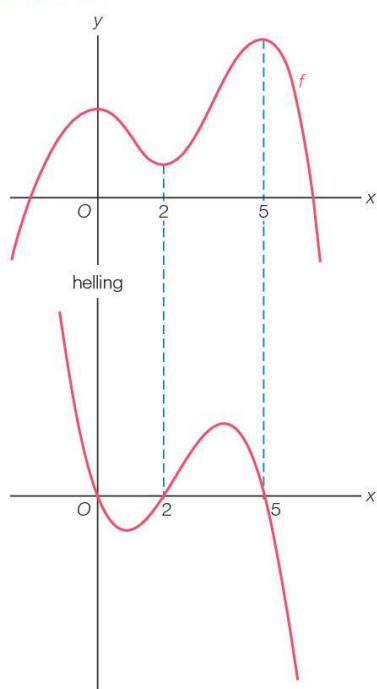
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
helling	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

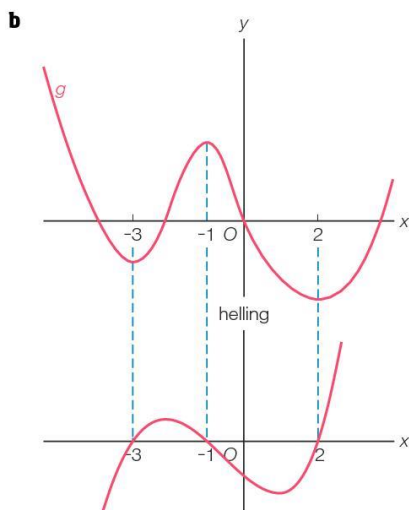


Bladzijde 32

39

a

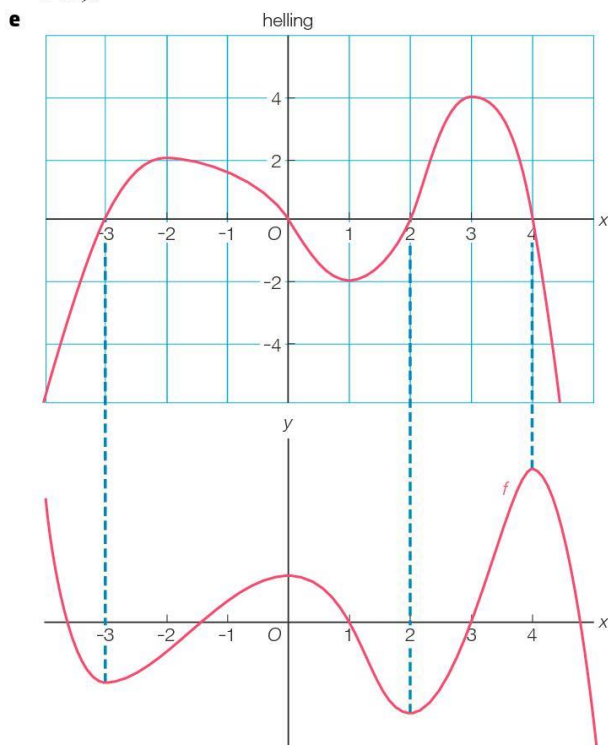




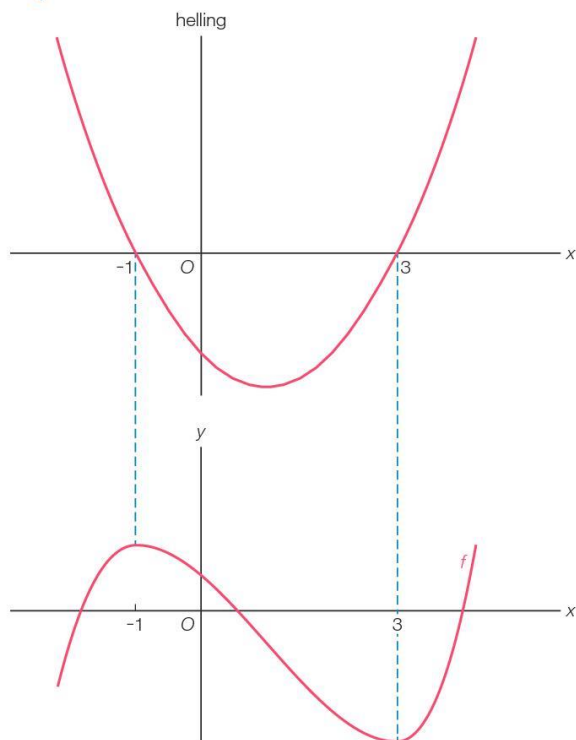
Bladzijde 33

- 40** Bij f hoort hellinggrafiek B.
 Bij g hoort hellinggrafiek D.
 Bij h hoort hellinggrafiek A.
 Bij k hoort hellinggrafiek C.

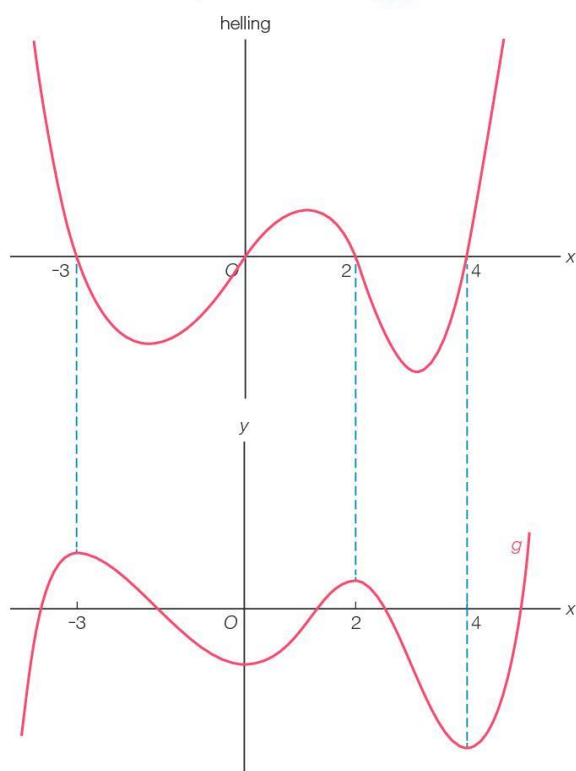
- 41** **a** De grafiek van f is dalend op $\langle \leftarrow, -3 \rangle$ omdat de helling van de grafiek op $\langle \leftarrow, -3 \rangle$ kleiner is dan 0.
b De grafiek van f heeft een top bij $x = -3$ omdat de hellinggrafiek daar de x -as snijdt. Dat is een laagste punt.
c De grafiek van f is stijgend op $\langle -3, 0 \rangle$.
d De grafiek van f heeft een hoogste punt bij $x = 0$. De grafiek gaat bij $x = 0$ over van stijgend (hellinggrafiek ligt boven de x -as) naar dalend (hellinggrafiek ligt onder de x -as).



a

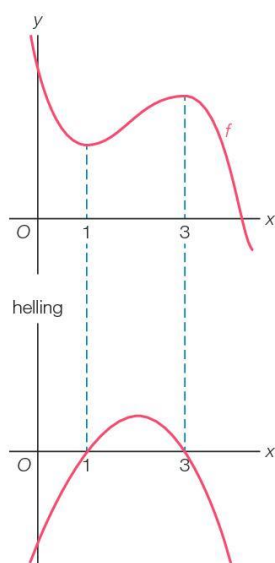


b

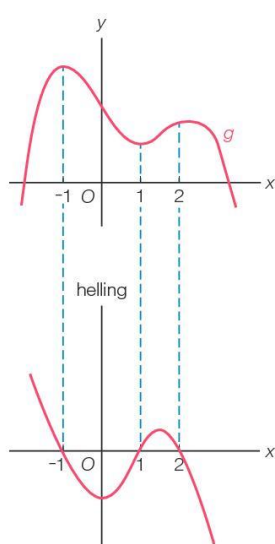


43

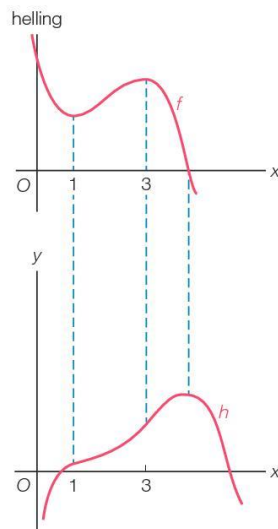
a



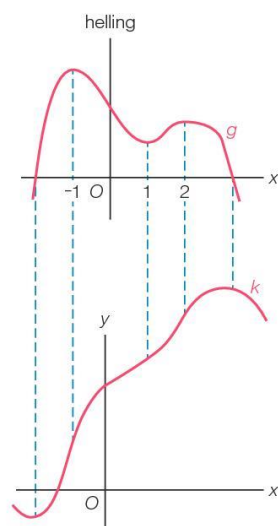
b



c



d



8.3 Differentiëren

Bladzijde 36

44

- a Door de oorsprong, dus stel $y = ax$.
Door $(2, 3)$, dus $a \cdot 2 = 3$ en dit geeft $a = 1,5$.
De formule is $y = 1,5x$.
- b De grafiek van g is een rechte lijn, dus voor elke x is de helling gelijk.
- c De formule is $y = 3$, want de helling is 3.
- d De formule is $y = 0$, want de helling van de lijn $y = -4$ is 0.

Bladzijde 37

45

- a $f(x) = 5x^2 - 7x + 5$ geeft $f'(x) = 10x - 7$
- b $g(x) = -2\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$ geeft $g'(x) = -5x + 4$
- c $h(x) = 0,02x^2 + 1,7x$ geeft $h'(x) = 0,04x + 1,7$
- d $k(x) = 7x + 10$ geeft $k'(x) = 7$

- 46** a $f(x) = (2x - 7)(8 + x) = 16x + 2x^2 - 56 - 7x = 2x^2 + 9x - 56$ geeft $f'(x) = 4x + 9$
 b $g(p) = -12p^2 + 30p$ geeft $g'(p) = -24p + 30$
 c $V(t) = 100 - (t^2 - 6t) = 100 - t^2 + 6t$ geeft $V'(t) = -2t + 6$
 d $K(q) = -0,01q^2 + 20q$ geeft $K'(q) = -0,02q + 20$
- 47** a $f(x) = 3x - 2(x^2 + 1) = 3x - 2x^2 - 2$ geeft $f'(x) = 3 - 4x$
 b $P(q) = 0,05q^2 - 200q$ geeft $P'(q) = 0,1q - 200$
 c $g(x) = 3(2x - 3)^2 = 3(4x^2 - 12x + 9) = 12x^2 - 36x + 27$ geeft $g'(x) = 24x - 36$
 d $h(a) = 50 - (\frac{1}{2}a - 4)^2 = 50 - (\frac{1}{4}a^2 - 4a + 16) = -\frac{1}{4}a^2 + 4a + 34$ geeft $h'(a) = -\frac{1}{2}a + 4$
- 48** a $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x) = 20x - 15x^2 + 28 - 21x = -15x^2 - x + 28$ geeft $f'(x) = -30x - 1$
 b $g(x) = (3x + 6)^2 = 9x^2 + 36x + 36$ geeft $g'(x) = 18x + 36$
 c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(x - 1) + 8 = 5(x^2 - 6x + 9) + 5x - 5 + 8 = 5x^2 - 30x + 45 + 5x - 5 + 8 = 5x^2 - 25x + 48$ geeft $h'(x) = 10x - 25$
 d $k(x) = -3(x - 1)(5 - 2x) - 8(x - 7) = -3(5x - 2x^2 - 5 + 2x) - 8x + 56 = -15x + 6x^2 + 15 - 6x - 8x + 56 = 6x^2 - 29x + 71$ geeft $k'(x) = 12x - 29$

Bladzijde 38

- 49** a $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x - 2$
 Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = \frac{1}{2}x - 2$.
 b $x = 6$ geeft helling $= \frac{1}{2} \cdot 6 - 2 = 1$
 c helling $= -1$ geeft $\frac{1}{2}x - 2 = -1$
 $\frac{1}{2}x = 1$
 $x = 2$

- 50** $y = ax^2$ door $(2, 2)$ geeft $a \cdot 2^2 = 2$, dus $4a = 2$ en dit geeft $a = \frac{1}{2}$.

Bladzijde 39

- 51** a $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$ geeft $f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 2$
 b $g(x) = -2x^7 - 3x^5 + 3,4$ geeft $g'(x) = -14x^6 - 15x^4$
 c $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12$ geeft $h'(t) = -t^2 + 13t$
 d $k(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3$ geeft $k'(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2$
- 52** a $f(x) = 3(2x + 1)^2 = 3(4x^2 + 4x + 1) = 12x^2 + 12x + 3$ geeft $f'(x) = 24x + 12$
 b $g(x) = 7(3x - 2)(x^2 + 2x) = 7(3x^3 + 6x^2 - 2x^2 - 4x) = 7(3x^3 + 4x^2 - 4x) = 21x^3 + 28x^2 - 28x$ geeft $g'(x) = 63x^2 + 56x - 28$
 c $h(x) = 3px^8 - px^4$ geeft $h'(x) = 24px^7 - 4px^3$
 d $k(x) = x^3 + a$ geeft $k'(x) = 3x^2$
- 53** a $W(q) = -0,02q^2 + 8q - 5$ geeft $W'(q) = -0,04q + 8$
 b $N(t) = 5t^3 + 8t^2 - t$ geeft $N'(t) = 15t^2 + 16t - 1$
 c $R(q) = 5q(q - 70)^2 = 5q(q^2 - 140q + 4900) = 5q^3 - 700q^2 + 24500q$ geeft $R'(q) = 15q^2 - 1400q + 24500$
 d $L(a) = -0,006a^4 + 0,2a^3(a - 5) - 8 = -0,006a^4 + 0,2a^4 - a^3 - 8 = 0,194a^4 - a^3 - 8$ geeft $L'(a) = 0,776a^3 - 3a^2$
- 54** a $f(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x) = 3x^3 + 15x^2 - x^2 - 5x = 3x^3 + 14x^2 - 5x$ geeft $f'(x) = 9x^2 + 28x - 5$
 b $g(x) = x^5(x^3 - 4x) - 2x = x^8 - 4x^6 - 2x$ geeft $g'(x) = 8x^7 - 24x^5 - 2$
 c $N(t) = (3t^3 - 1)^2 = 9t^6 - 6t^3 + 1$ geeft $N'(t) = 54t^5 - 18t^2$
 d $F(a) = 0,16a^2(Q - 3a) = 0,16Qa^2 - 0,48a^3$ geeft $F'(a) = 0,32Qa - 1,44a^2$

- 55 a** $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 5$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$
 Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.
b $x = 4$ geeft helling $= -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = -24 + 8 + 1 = -15$
c helling $= -1$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -1$
 Voer in $y_1 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ en $y_2 = -1$.
 De optie snijpunt geeft $x = -\frac{2}{3}$ en $x = 2$, dus voor $x = -\frac{2}{3}$ en $x = 2$ is de helling gelijk aan -1 .

Bladzijde 40

56 $k(x) = \frac{4x-2}{3x+3} = \frac{2(2x-1)}{3(x+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2}{3} \left(\frac{2x-1}{x+1} \right) = \frac{2}{3} \cdot h(x)$ geeft
 $k'(x) = \frac{2}{3} \cdot h'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

8.4 Notaties en regels voor de afgeleide

Bladzijde 42

- 57 a** $f(x) = 5x^2 + 3a^4$ geeft $f'(x) = 10x + 0 = 10x$
b $f(a) = 5x^2 + 3a^4$ geeft $f'(a) = 0 + 12a^3 = 12a^3$
c Het is niet duidelijk wat de variabele is.

- 58 a** $y = 7x^4 - a^3$ geeft $\frac{dy}{dx} = 28x^3$
b $y = 7x^4 - a^3$ geeft $\frac{dy}{da} = -3a^2$
c $R = q^3 - 5pq$ geeft $\frac{dR}{dq} = 3q^2 - 5p$
d $R = q^3 - 5pq$ geeft $\frac{dR}{dp} = -5q$
e $B = a^3 - 3t^2$ geeft $\frac{dB}{dt} = -6t$
f $B = a^3 - 3t^2$ geeft $\frac{dB}{da} = 3a^2$

Bladzijde 43

59 $R = 5a^2 - 3ab^3 - 5abc + 5a - 3$ geeft
 $\frac{dR}{da} = 10a - 3b^3 - 5bc + 5$
 $\frac{dR}{db} = 0 - 9ab^2 - 5ac + 0 = -9ab^2 - 5ac$
 $\frac{dR}{dc} = 0 - 0 - 5ab + 0 = -5ab$

- 60 a** $y = \frac{10}{x^3} = 10x^{-3}$ **d** $y = \frac{7}{\sqrt{x}} = \frac{7}{x^{\frac{1}{2}}} = 7x^{-\frac{1}{2}}$
b $y = 8 \cdot \sqrt[3]{x} = 8x^{\frac{1}{3}}$ **e** $y = 4x\sqrt{x} = 4x^{1\frac{1}{2}}$
c $y = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$ **f** $y = \frac{3}{4x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{3}{4x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{3}{4}x^{-2\frac{1}{2}}$

Bladzijde 44

- 61 a** $f(x) = \frac{6}{x^3} + 6x^3 = 6x^{-3} + 6x^3$ geeft $f'(x) = -18x^{-4} + 18x^2 = -\frac{18}{x^4} + 18x^2$
- b** $g(x) = 3x^6 - \frac{4}{x} = 3x^6 - 4x^{-1}$ geeft $g'(x) = 18x^5 + 4x^{-2} = 18x^5 + \frac{4}{x^2}$
- c** $m(t) = 12t \cdot \sqrt[4]{t} = 12t^{1\frac{1}{4}}$ geeft $m'(t) = 15t^{\frac{1}{4}} = 15 \cdot \sqrt[4]{t}$
- d** $l(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{2p^2} = 2p^{-1} + \frac{1}{2}p^{-2}$ geeft $l'(p) = -2p^{-2} - p^{-3} = -\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p^3}$
- e** $h(x) = 3x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 3x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x) = 4\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 4\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$
- f** $k(q) = \frac{1}{q} = q^{-1}$ geeft $k'(q) = -q^{-2} = -\frac{1}{q^2}$

- 62 a** $y = x + \frac{4}{\sqrt{x}} = x + 4x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 1 - 2x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{x\sqrt{x}}$
- b** $y = 3x^2 \cdot \sqrt{x} = 3x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 7\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 7\frac{1}{2}x\sqrt{x}$
- c** $y = 3x - x^{-1,65}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3 + 1,65x^{-2,65}$
- d** $y = 10x^{1,72} + \frac{6}{x^{1,35}} = 10x^{1,72} + 6x^{-1,35}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 17,2x^{0,72} - 8,1x^{-2,35} = 17,2x^{0,72} - \frac{8,1}{x^{2,35}}$
- e** $y = \frac{2}{5x} + \frac{5x}{2} = \frac{2}{5}x^{-1} + 2\frac{1}{2}x$ geeft $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{5}x^{-2} + 2\frac{1}{2} = -\frac{2}{5x^2} + 2\frac{1}{2}$
- f** $y = (1+x)\sqrt{x} = \sqrt{x} + x\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$

- 63 a** $y_A = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
 $y = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$
 helling $= -\frac{2}{4^2} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$
- b** helling $= -\frac{2}{1^2} = -2$
- c** snelheid $= -\frac{2}{5^2} = -\frac{2}{25}$
- d** Voor elke $x > 0$ is $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2}$ kleiner dan nul, dus de grafiek van y is dalend.

Bladzijde 45

- 64 a** $y = \frac{2}{x} + 2x = 2x^{-1} + 2x$ geeft $\frac{dy}{dx} = -2x^{-2} + 2 = -\frac{2}{x^2} + 2$
 snelheid $= -\frac{2}{4^2} + 2 = -\frac{2}{16} + 2 = -\frac{1}{8} + 2 = 1\frac{7}{8}$
- b** helling $= -\frac{2}{(\frac{1}{2})^2} + 2 = -\frac{2}{(\frac{1}{4})} + 2 = -8 + 2 = -6 < 0$
- c** helling $= -\frac{2}{1^2} + 2 = -\frac{2}{1} + 2 = -2 + 2 = 0$, dus de raaklijn is horizontaal.

- 65 a** $x = 4$ geeft $y = 10\sqrt{4} - 5 \cdot 4 = 10 \cdot 2 - 20 = 20 - 20 = 0$
 Dus $x_A = 4$.
 $y = 10\sqrt{x} - 5x = 10x^{\frac{1}{2}} - 5x$ geeft $\frac{dy}{dx} = 5x^{-\frac{1}{2}} - 5 = \frac{5}{\sqrt{x}} - 5$
 helling $= \frac{5}{\sqrt{4}} - 5 = \frac{5}{2} - 5 = -2\frac{1}{2}$

b snelheid $= \frac{5}{\sqrt{\frac{1}{4}}} - 5 = \frac{5}{(\frac{1}{2})} - 5 = 10 - 5 = 5$

c helling $= \frac{5}{\sqrt{1}} - 5 = 5 - 5 = 0$, dus de raaklijn is horizontaal.

66 a $y = x^2 + \frac{16}{x} - 9 = x^2 + 16x^{-1} - 9$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2x - 16x^{-2} = 2x - \frac{16}{x^2}$

$x = 1,5$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 1,5 - \frac{16}{1,5^2} = -4\frac{1}{9} < 0$

Voor $x = 1,5$ neemt y dus af.

b helling $= 7$ geeft $2x - \frac{16}{x^2} = 7$

Voer in $y_1 = 2x - \frac{16}{x^2}$ en $y_2 = 7$.

De optie snijpunt geeft $x = 4$.

Voor $x = 4$ is de helling van de grafiek gelijk aan 7.

c $x = 5$ geeft helling $= 2 \cdot 5 - \frac{16}{5^2} = 9\frac{9}{25}$ en $x = 6$ geeft helling $= 2 \cdot 6 - \frac{16}{6^2} = 11\frac{5}{9}$.

De toename is $\frac{11\frac{5}{9} - 9\frac{9}{25}}{9\frac{9}{25}} \times 100\% \approx 23,5\%$.

67 a $k(x) = f(g(x))$ met $f(g) = g^6$ en $g(x) = 3 - x^5$

b $k(x) = f(g(x))$ met $f(g) = \sqrt{g}$ en $g(x) = x^2 + 1$

c $k(x) = f(g(x))$ met $f(g) = \frac{2}{g^3}$ en $g(x) = x + 8$

Bladzijde 46

68 a $y = -3(2x - 5)^6$ geeft $\frac{dy}{dx} = -18(2x - 5)^5 \cdot 2 = -36(2x - 5)^5$

b $y = (4x^2 - x)^{1,4}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 1,4(4x^2 - x)^{0,4} \cdot (8x - 1)$

c $y = 2\sqrt{3 - 7x} = 2(3 - 7x)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = (3 - 7x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -7 = \frac{-7}{\sqrt{3 - 7x}}$

d $y = \frac{8}{\sqrt{3x + 2}} = 8(3x + 2)^{-\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -4(3x + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{-12}{(3x + 2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-12}{(3x + 2)\sqrt{3x + 2}}$

e $y = \frac{4}{(2 - x^2)^3} = 4(2 - x^2)^{-3}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -12(2 - x^2)^{-4} \cdot -2x = \frac{24x}{(2 - x^2)^4}$

f $y = x^2 + \sqrt{x^2 + x} = x^2 + (x^2 + x)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) = 2x + \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

Bladzijde 47

69 a $S = \frac{2}{(3 - a^2)^5} = 2(3 - a^2)^{-5}$ geeft $\frac{dS}{da} = -10(3 - a^2)^{-6} \cdot -2a = \frac{20a}{(3 - a^2)^6}$

b $K = \sqrt{2q + 1} = (2q + 1)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dK}{dq} = \frac{1}{2}(2q + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2q + 1}}$

c $W = 6(p^2 - 2p + 5)^{0,7}$ geeft $\frac{dW}{dp} = 4,2(p^2 - 2p + 5)^{-0,3} \cdot (2p - 2)$

70 a $K = (5q + 2)^4 - 3q$ geeft $\frac{dK}{dq} = 4(5q + 2)^3 \cdot 5 - 3 = 20(5q + 2)^3 - 3$

b $y = \frac{5}{(2x + 1)^8} + 4x^2 = 5(2x + 1)^{-8} + 4x^2$ geeft $\frac{dy}{dx} = -40(2x + 1)^{-9} \cdot 2 + 8x = \frac{-80}{(2x + 1)^9} + 8x$

c $B = \frac{8}{a^3} + 6\sqrt{a^3 + 2} = 8a^{-3} + 6(a^3 + 2)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dB}{da} = -24a^{-4} + 3(a^3 + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3a^2 = -\frac{24}{a^4} + \frac{9a^2}{\sqrt{a^3 + 2}}$

d $P = \sqrt[3]{3q - 5} = (3q - 5)^{\frac{1}{3}}$ geeft $\frac{dP}{dq} = \frac{1}{3}(3q - 5)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 = \frac{1}{(3q - 5)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3q - 5)^2}}$

71 a $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b $y = 2\sqrt{3 - 7x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3 - 7x}} \cdot -7 = \frac{-7}{\sqrt{3 - 7x}}$

$K = \sqrt{2q + 1}$ geeft $\frac{dK}{dq} = \frac{1}{2\sqrt{2q + 1}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2q + 1}}$

$B = \frac{8}{a^3} + 6\sqrt{a^3 + 2} = 8a^{-3} + 6\sqrt{a^3 + 2}$ geeft $\frac{dB}{da} = -24a^{-4} + 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^3 + 2}} \cdot 3a^2 = -\frac{24}{a^4} + \frac{9a^2}{\sqrt{a^3 + 2}}$

8.5 Extreme waarden en de afgeleide

Bladzijde 49

72 a $W = -0,1q^3 + 12q^2 - 210q + 500$ geeft $\frac{dW}{dq} = -0,3q^2 + 24q - 210$

b $\left[\frac{dW}{dq}\right]_{q=70} = -0,3 \cdot 70^2 + 24 \cdot 70 - 210 = -1470 + 1680 - 210 = 0$

Het punt op de grafiek dat bij $q = 70$ hoort is een top van de grafiek.

Bladzijde 51

73 a De snelheid is $\left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=50} = -0,54 \cdot 50^{0,8} + 22,5 \cdot 50^{-0,1} = 2,868... \approx 2,87$ euro per stuk.

b $W(16) = 4 \cdot 16^2 - \frac{1}{6} \cdot 16^3 = 341,333... \text{ euro}$
Dus de maximale winst is 34 133 euro per maand.

c Bij een productie van 2000 stuks per maand hoort $q = 20$.
 $W'(20) = 8 \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot 20^2 = -40$
De winst neemt af met 40 euro per maand.

74 a $R = 4q^{0,41} - q^{0,83}$ geeft $\frac{dR}{dq} = 1,64q^{-0,59} - 0,83q^{-0,17}$

De snelheid is $\left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=0,5} = 1,64 \cdot 0,5^{-0,59} - 0,83 \cdot 0,5^{-0,17} \approx 1,53$ euro per stuk.

b Bij een productie van 8500 stuks hoort $q = 8,5$.
De snelheid is $\left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=8,5} = 1,64 \cdot 8,5^{-0,59} - 0,83 \cdot 8,5^{-0,17} \approx -0,11$.
De opbrengst neemt af met 0,11 euro per stuk.

c $\frac{dR}{dq} = 0$ geeft $1,64q^{-0,59} - 0,83q^{-0,17} = 0$
Voer in $y_1 = 1,64x^{-0,59} - 0,83x^{-0,17}$.
De optie nulpunt geeft $x = 5,060...$
 $q = 5,060...$ geeft $R = 3,9350...$
De maximale opbrengst is 3935 euro.

Bladzijde 52

- 75 a** $a = 0$ geeft $H = 150$ en $a = 12$ geeft $H = 150$.
De wandeling eindigt op dezelfde hoogte als hij begint, dus het zou een rondwandeling kunnen zijn.

b $H = -0,4a^3 + 4,8a^2 + 150$ geeft $\frac{dH}{da} = -1,2a^2 + 9,6a$

$$\begin{aligned}\frac{dH}{da} = 0 & \text{ geeft } -1,2a^2 + 9,6a = 0 \\ & -1,2a(a - 8) = 0 \\ & a = 0 \text{ of } a = 8\end{aligned}$$

Uit de schets volgt dat H maximaal is voor $a = 8$.

De maximale hoogte is $-0,4 \cdot 8^3 + 4,8 \cdot 8^2 + 150 = 252,4$ meter.

- 76 a** $W(q) = -0,01q^3 + 1,5q^2 - 48q - 200$ geeft $W'(q) = -0,03q^2 + 3q - 48$
 $W'(80) = -0,03 \cdot 80^2 + 3 \cdot 80 - 48 = -192 + 240 - 48 = 0$

Uit de schets volgt dat W maximaal is voor $q = 80$, dus de winst is maximaal bij een maandelijkse productie van 80 000 stuks.

- b** $W(80) = -0,01 \cdot 80^3 + 1,5 \cdot 80^2 - 48 \cdot 80 - 200 = 440$
De maximale winst is 440 000 euro per maand.

- 77 a** De derde week is van $t = 2$ tot $t = 3$.
 $t = 2$ geeft $N = 152$ en $t = 3$ geeft $N = 219$.

De toename is $\frac{219 - 152}{152} \times 100\% \approx 44,1\%$.

- b** $N(t) = -2t^3 + 9t^2 + 60t + 12$ geeft $N'(t) = -6t^2 + 18t + 60$

$N'(3) = -6 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 + 60 = 60 > 0$, dus op $t = 3$ neemt het aantal bacteriën toe.

- c** $N'(7) = -6 \cdot 7^2 + 18 \cdot 7 + 60 = -108 < 0$, dus op $t = 7$ neemt het aantal bacteriën af.

- d** $N'(t) = 0$ geeft $-6t^2 + 18t + 60 = 0$

$$t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$(t + 2)(t - 5) = 0$$

$$t = -2 \text{ of } t = 5$$

Uit de schets volgt dat N maximaal is voor $t = 5$.

$$N(5) = -2 \cdot 5^3 + 9 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 + 12 = 287$$

Er zijn maximaal 287 miljoen bacteriën.

- 78 a** $R(q) = aq^2 + 40q$ geeft $R'(q) = 2aq + 40$

$$R'(q) = 0 \text{ geeft } 2aq + 40 = 0$$

$$2aq = -40$$

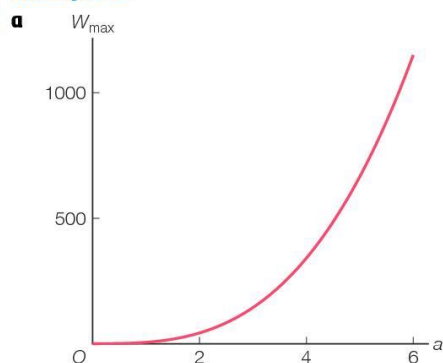
$$q = \frac{-40}{2a} = -\frac{20}{a}$$

- b** Invullen van $a = -0,25$ in $q = -\frac{20}{a}$ geeft $q = -\frac{20}{-0,25} = 80$.

Dus de opbrengst is maximaal bij een productie van 80 stuks.

Bladzijde 53

79



- b** 100 000 euro, dus $W_{\max} = 1000$.
 Voer in $y_1 = 5\frac{1}{3}x^3$ en $y_2 = 1000$.
 De optie snijpunt geeft $x = 5,723$...
 Dus vanaf $a = 5,73$.

Bladzijde 54

80 a $t = \frac{1}{2}p$ geeft $N = 25p \cdot (\frac{1}{2}p)^2 - 50 \cdot (\frac{1}{2}p)^3 = 25p \cdot \frac{1}{4}p^2 - 50 \cdot \frac{1}{8}p^3 = 6\frac{1}{4}p^3 - 6\frac{1}{4}p^3 = 0$

Dus op $t = \frac{1}{2}p$ is $N = 0$, dat wil zeggen dat de laatste bezoekers de diertuin op $t = \frac{1}{2}p$ verlaten.

b $p = 20$ geeft $N = 500t^2 - 50t^3$

$N = 500t^2 - 50t^3$ geeft $\frac{dN}{dt} = 1000t - 150t^2$

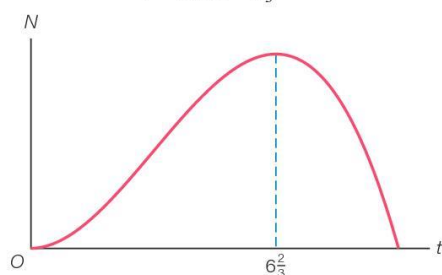
$\frac{dN}{dt} = 0$ geeft $1000t - 150t^2 = 0$

$t(1000 - 150t) = 0$

$t = 0$ of $1000 - 150t = 0$

$t = 0$ of $-150t = -1000$

$t = 0$ of $t = 6\frac{2}{3}$



N is maximaal voor $t = 6\frac{2}{3}$.

$N_{\max} = 500 \cdot (6\frac{2}{3})^2 - 50 \cdot (6\frac{2}{3})^3 \approx 7407$

Er zijn maximaal 7407 bezoekers.

c $N = 25pt^2 - 50t^3$ geeft $\frac{dN}{dt} = 50pt - 150t^2$

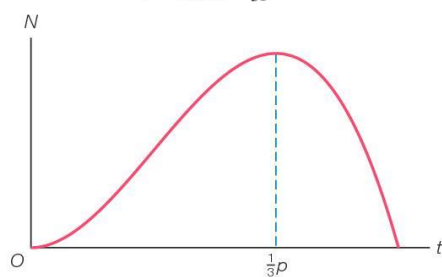
$\frac{dN}{dt} = 0$ geeft $50pt - 150t^2 = 0$

$t(50p - 150t) = 0$

$t = 0$ of $50p - 150t = 0$

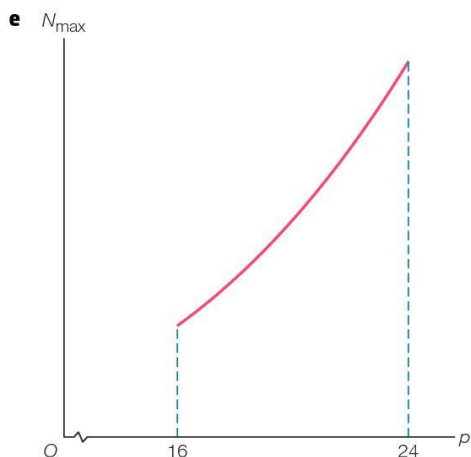
$t = 0$ of $-150t = -50p$

$t = 0$ of $t = \frac{1}{3}p$



Bij $t = \frac{1}{3}p$ heb je met een maximum te maken.

d $N_{\max} = 25p \cdot (\frac{1}{3}p)^2 - 50 \cdot (\frac{1}{3}p)^3 = 25p \cdot \frac{1}{9}p^2 - 50 \cdot \frac{1}{27}p^3 = \frac{25}{9}p^3 - \frac{50}{27}p^3 = \frac{25}{27}p^3$

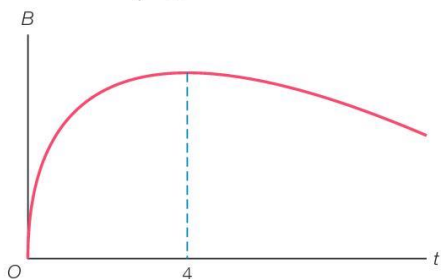


- f Voer in $y_1 = \frac{25}{27}x^3$, $y_2 = 6000$ en $y_3 = 10000$.
 De optie snijpunt met y_1 en y_2 geeft $x = 18,64\dots$
 De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x = 22,10\dots$
 Dus voor $18,7 < p < 22,1$.

81 a $B = 4\sqrt{t} - t = 4t^{\frac{1}{2}} - t$ geeft $\frac{dB}{dt} = 2t^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{t}} - 1$

De snelheid is $\left[\frac{dB}{dt}\right]_{t=3} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \approx 0,15 \text{ dm}^2/\text{maand} = 15 \text{ cm}^2/\text{maand}$.

b $\frac{dB}{dt} = 0$ geeft $\frac{2}{\sqrt{t}} - 1 = 0$
 $\frac{2}{\sqrt{t}} = 1$
 $\sqrt{t} = 2$
 $t = 4$



Uit de schets volgt dat B maximaal is voor $t = 4$.

$$B_{\max} = 4\sqrt{4} - 4 = 4 \text{ dm}^2$$

c $B = a\sqrt{t} - t = at^{\frac{1}{2}} - t$ geeft $\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2}at^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{a}{2\sqrt{t}} - 1$

$$\frac{dB}{dt} = 0 \text{ geeft } \frac{a}{2\sqrt{t}} - 1 = 0$$

$$\frac{a}{2\sqrt{t}} = 1$$

$$2\sqrt{t} = a$$

$$\sqrt{t} = \frac{1}{2}a, \text{ dus } t = \frac{1}{4}a^2$$

De bladoppervlakte is maximaal als $t = \frac{1}{4}a^2$.

$$B_{\max} = a \cdot \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$$

82 a $M = 90$ geeft $V = 0,0015d^2(\frac{1}{3} \cdot 90 - \frac{1}{2}d) = 0,0015d^2(30 - \frac{1}{2}d) = 0,045d^2 - 0,00075d^3$
 $V = 0,045d^2 - 0,00075d^3$ geeft $\frac{dV}{dd} = 0,09d - 0,00225d^2$

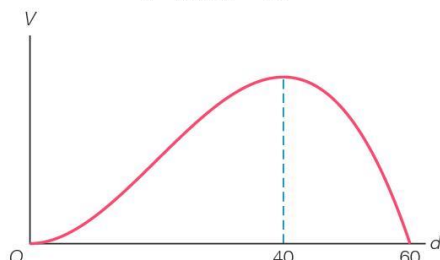
$$\frac{dV}{dd} = 0 \text{ geeft } 0,09d - 0,00225d^2 = 0$$

$$d(0,09 - 0,00225d) = 0$$

$$d = 0 \text{ of } 0,09 - 0,00225d = 0$$

$$d = 0 \text{ of } -0,00225d = -0,09$$

$$d = 0 \text{ of } d = 40$$



De verlaging V is maximaal voor $d = 40$.

De maximale verlaging is $V_{\max} = 0,045 \cdot 40^2 - 0,00075 \cdot 40^3 = 24 \text{ mmHg}$.

b $V = 0,0015d^2(\frac{1}{3}M - \frac{1}{2}d) = 0,0005Md^2 - 0,00075d^3$ geeft $\frac{dV}{dd} = 0,001Md - 0,00225d^2$

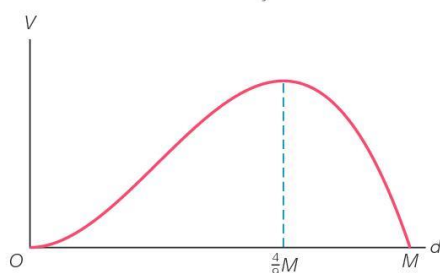
$$\frac{dV}{dd} = 0 \text{ geeft } 0,001Md - 0,00225d^2 = 0$$

$$d(0,001M - 0,00225d) = 0$$

$$d = 0 \text{ of } 0,001M - 0,00225d = 0$$

$$d = 0 \text{ of } -0,00225d = -0,001M$$

$$d = 0 \text{ of } d = \frac{4}{9}M$$



Bij $d = \frac{4}{9}M$ heb je met een maximum te maken.

c $d = \frac{4}{9}M$ geeft

$$V_{\max} = 0,0005M \cdot (\frac{4}{9}M)^2 - 0,00075 \cdot (\frac{4}{9}M)^3 = 0,0005M \cdot \frac{16}{81}M^2 - 0,00075 \cdot \frac{64}{729}M^3 \approx 0,000033M^3$$

$$\text{Dus } a = 0,000033.$$

83 $N = -4t^3 + at^2 - 10at + 6000$ geeft $\frac{dN}{dt} = -12t^2 + 2at - 10a$

Bij 9 uur 's avonds hoort $t = 21$.

$$t = 21 \text{ geeft } -12 \cdot 21^2 + 2a \cdot 21 - 10a = -5292 + 32a$$

Het aantal bezoekers op $t = 21$ is maximaal, dus $-5292 + 32a = 0$

$$32a = 5292$$

$$a = 165,375$$

$$\text{Dus } N = -4t^3 + 165,375t^2 - 1653,75t + 6000.$$

Invullen van $t = 21$ geeft $N = 7157,625$, dus het maximale aantal bezoekers is 7158.

Diagnostische toets

Bladzijde 58

1 a

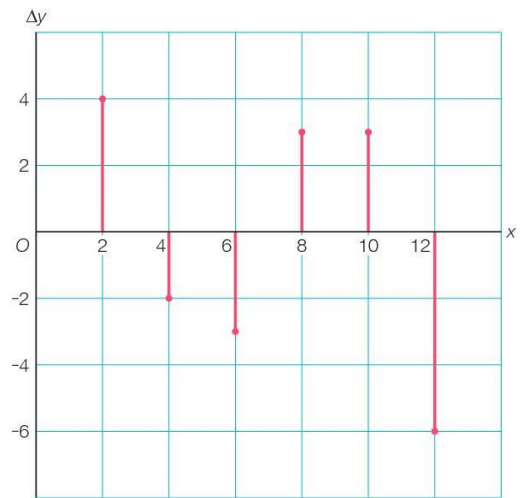
interval	Δy
$[0, 2]$	4
$[2, 4]$	-2
$[4, 6]$	-3
$[6, 8]$	3
$[8, 10]$	3
$[10, 12]$	-6

b De gemiddelde verandering op $[0, 4]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 2}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

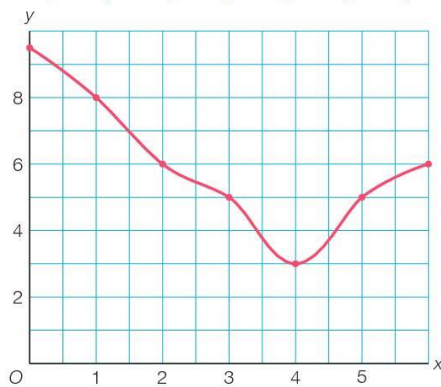
c Het differentiequotient op $[2, 12]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 6}{12 - 2} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}.$$

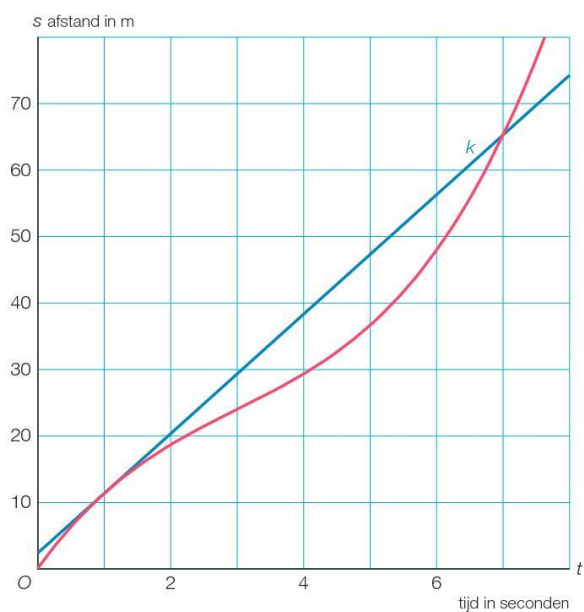


2 Door $(3, 5)$ en op $[3, 4]$ is $\Delta y = -2$, dus ook door $(4, 3)$.
Door $(3, 5)$ en op $[2, 3]$ is $\Delta y = -1$, dus ook door $(2, 6)$.
Enzovoort, zie de tabel.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	9,5	8	6	5	3	5	6

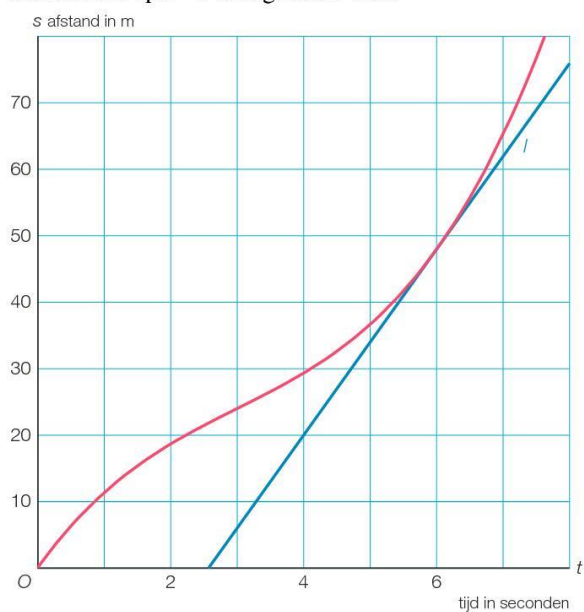


3 a



Raaklijn k door $(0, 2)$ en $(8, 74)$, dus $rc_k = \frac{74 - 2}{8 - 0} = 9$.

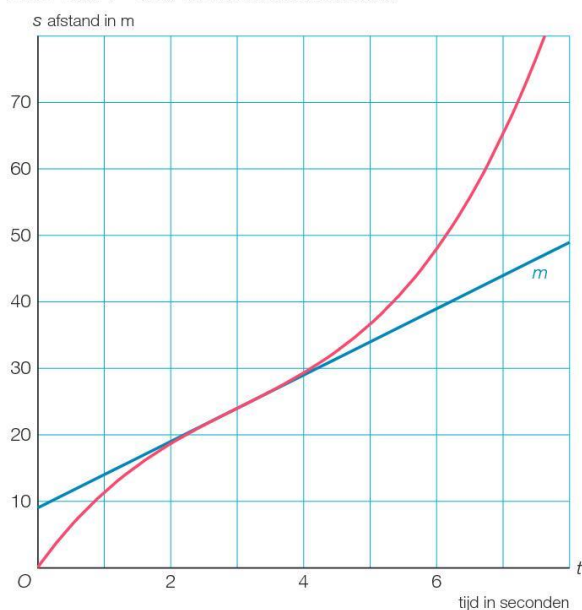
De snelheid op $t = 1$ is ongeveer 9 m/s.



Raaklijn l door $(4, 20)$ en $(8, 76)$, dus $rc_l = \frac{76 - 20}{8 - 4} = 14$.

De snelheid op $t = 6$ is ongeveer 14 m/s.

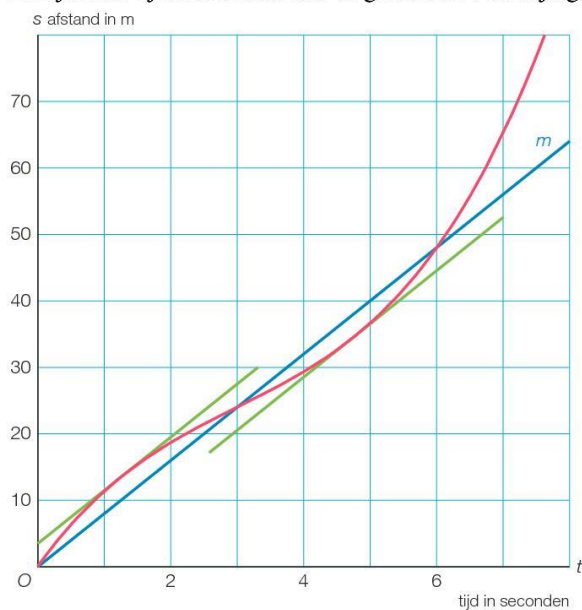
- b** Voor $t = 3$ krijg je de raaklijn met de kleinste richtingscoëfficiënt.
Dus voor $t = 3$ is de snelheid minimaal.



Raaklijn m door $(0, 9)$ en $(8, 49)$, dus $rc_m = \frac{49 - 9}{8 - 0} = 5$.

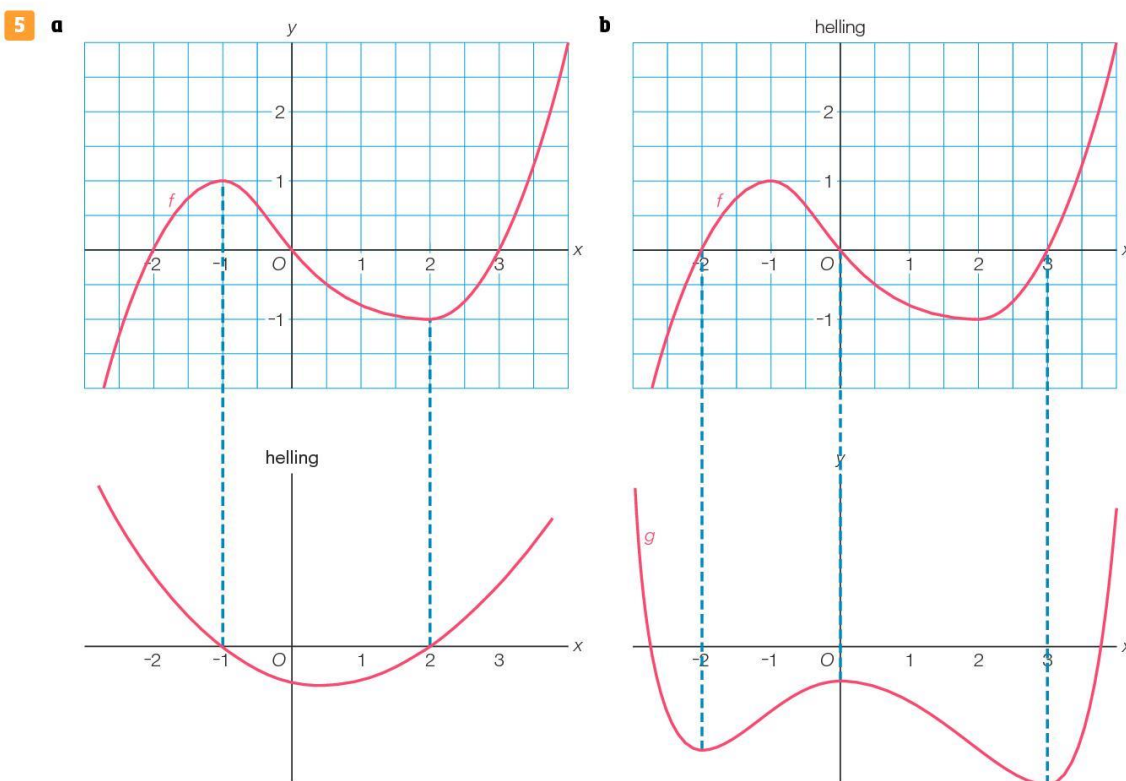
Dus de minimale snelheid is ongeveer 5 m/s.

- c** Teken de lijn m door $(0, 0)$ en $(6, 48)$.
Er zijn twee lijnen die raken aan de grafiek en evenwijdig zijn met m . Zie de figuur.



Er zijn dus twee tijdstippen tussen $t = 0$ en $t = 6$ waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[0, 6]$.

- 4 a** Bij 9:30 uur hoort $t = 9,5$.
 Voer in $y_1 = -0,014x^3 + 0,44x^2 - 2,6 + 11$.
 $\text{snellheid} = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=9,5} \approx 2,0^\circ\text{C per uur}$
- b** Bij 's middags half vier hoort $t = 15,5$.
 $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=15,5} \approx 0,95 > 0$, dus om half vier 's middags neemt de temperatuur toe.
- c** Bij 's avonds kwart voor zeven hoort $t = 18,75$.
 $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=18,75} \approx -0,87 < 0$, dus 's avonds om kwart voor zeven neemt de temperatuur af.



Bladzijde 59

- 6 a** $f(x) = 0,6x^3 - 1,3x^2 + 9$ geeft $f'(x) = 1,8x^2 - 2,6x$
b $N(t) = (3-t)(5+2t) = 15 + 6t - 5t - 2t^2 = -2t^2 + t + 15$ geeft $N'(t) = -4t + 1$
c $K(p) = p^3 - p(p-3)^2 = p^3 - p(p^2 - 6p + 9) = p^3 - p^3 + 6p^2 - 9p = 6p^2 - 9p$ geeft $K'(p) = 12p - 9$

7 $K = 20q^2 - 5pq + 8p^3$ geeft $\frac{dK}{dp} = 0 - 5q + 24p^2 = 24p^2 - 5q$
 $K = 20q^2 - 5pq + 8p^3$ geeft $\frac{dK}{dq} = 40q - 5p + 0 = 40q - 5p$

8 a $y = \frac{1}{5x^6} + 5x^6 \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{5}x^{-6} + 5x^{6\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -\frac{6}{5}x^{-7} + 32\frac{1}{2}x^{5\frac{1}{2}} = -\frac{6}{5x^7} + 32\frac{1}{2}x^5 \cdot \sqrt{x}$
b $y = (5+x)\sqrt{x} = 5\sqrt{x} + x\sqrt{x} = 5x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$
c $y = \sqrt[6]{x^5} + \frac{5}{x} + \frac{x}{6} = x^{\frac{5}{6}} + 5x^{-1} + \frac{1}{6}x$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} - 5x^{-2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6 \cdot \sqrt[6]{x}} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{6}$

9 a $y = 6(3x - 1)^4 + 7x$ geeft $\frac{dy}{dx} = 24(3x - 1)^3 \cdot 3 + 7 = 72(3x - 1)^3 + 7$
b $R = 20\sqrt{5q^3 + 4q} = 20(5q^3 + 4q)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$\frac{dR}{dq} = 10(5q^3 + 4q)^{-\frac{1}{2}} \cdot (15q^2 + 4) = \frac{10(15q^2 + 4)}{\sqrt{5q^3 + 4q}} = \frac{150q^2 + 40}{\sqrt{5q^3 + 4q}}$$

c $A = \frac{4}{(2 - 3q)^4} = 4(2 - 3q)^{-4}$ geeft $\frac{dA}{dq} = -16(2 - 3q)^{-5} \cdot -3 = \frac{48}{(2 - 3q)^5}$

10 a $R = 5q^{0,6} - 2q^{0,92}$ geeft $\frac{dR}{dq} = 3q^{-0,4} - 1,84q^{-0,08}$
De snelheid is $\left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=6} = 3 \cdot 6^{-0,4} - 1,84 \cdot 6^{-0,08} \approx -0,13$ euro per stuk.
b De snelheid is $\left[\frac{dR}{dq}\right]_{x=3} = 3 \cdot 3^{-0,4} - 1,84 \cdot 3^{-0,08} \approx 0,25$ euro per stuk.
c $\frac{dR}{dq} = 0$ geeft $3q^{-0,4} - 1,84q^{-0,08} = 0$
Voer in $y_1 = 3x^{-0,4} - 1,84x^{-0,08}$.
De optie nulpunt geeft $x = 4,60...$
 $q = 4,60...$ geeft $R = 5 \cdot 4,60...^{0,6} - 2 \cdot 4,60...^{0,92} \approx 4,349$
De maximale opbrengst is ongeveer 4349 euro.

11 $E(n) = 0,48n - an^2$ geeft $E'(n) = 0,48 - 2an$
 $E'(n) = 0$ geeft $0,48 - 2an = 0$
 $-2an = -0,48$

$$n = \frac{0,48}{2a} = \frac{0,24}{a} = \frac{24}{100a} = \frac{6}{25a}$$

$$E_{\max} = E\left(\frac{6}{25a}\right) = 0,48 \cdot \frac{6}{25a} - a \cdot \left(\frac{6}{25a}\right)^2 = \frac{2,88}{25a} - a \cdot \frac{36}{625a^2} = \frac{2,88}{25a} - \frac{1,44}{25a} = \frac{1,44}{25a}$$